



سنجش از دور

GIS ایران



سال اول، شماره دوم، تابستان
Vol.1, No.2, Summer 2009
سنجش از دور و GIS ایران
Iranian Remote Sensing & GIS
۱۷-۳۰

بهبود روش استخراج ویژگی غیرپارامتریک وزن دار با استفاده از ترکیب خطی نمونه های آموزشی در تصاویر ابرطیفی

محسن قمری اصل^{*}، محمدرضا مبارشی^۲، محمدجواد ولدان زوج^۳، برات مجردی^۴

۱. دانشجوی دکترای سنجش از دور، گروه مهندسی نقشه برداری، دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی
۲. دانشیار گروه مهندسی نقشه برداری، دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی
۳. دانشیار گروه مهندسی نقشه برداری، دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی
۴. استادیار گروه مهندسی نقشه برداری، دانشگاه شهرد رجایی

تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۸۸/۱۱/۳

تاریخ دریافت مقاله: ۱۳۸۸/۴/۱۰

چکیده

در این تحقیق، روشی برای بهبود استخراج ویژگی غیرپارامتریک وزن دار ارائه شده است، که در مسائل تشخیص الگو در فضاهای با ابعاد بالا استفاده می گردد. روش استخراج ویژگی غیرپارامتریک وزن دار براساس بسط غیرپارامتریک ماتریس های پراکنده گزار گرفته است، که پارامترهای میانگین آنها به طور جداگانه برای هر نمونه و با استفاده از مجموع وزن دار نمونه های سایر کلاس ها محاسبه می شوند. وزن هر یک از این نمونه ها براساس فاصله اقلیدسی آنها از نمونه اصلی (نمونه تحت بررسی) محاسبه می گردد. اما تنها با استفاده از پارامتر فاصله نمی توان پراکنده نمونه ها را به طور کامل بیان کرد، و محل قرارگیری آنها نیز در بیان پراکنده نمونه ها مؤثر است. بدین معنی که ممکن است دو نمونه که فواصل یکسانی از نمونه اصلی (نمونه تحت بررسی) دارند، وابستگی شان به آن نمونه یکسان نباشد. به عنوان مثال، ممکن است که یکی از آنها کاملاً به نمونه اصلی وابسته باشد و دیگری کاملاً مستقل از آن باشد. از سوی دیگر، این وابستگی ها با ترکیب خطی آنها مرتبط است. چرا که در حالت ایده آل انتظار می رود نمونه های یک کلاس، کاملاً ترکیبی خطی از یکدیگر باشند و نمونه های کلاس های متفاوت کاملاً مستقل از هم باشند. از این رو، ترکیب خطی بین نمونه ها در تعیین پراکنده ها مؤثر خواهد بود. در پژوهش حاضر، با استفاده از پارامتر مهم ترکیب خطی، نتیجه روش استخراج ویژگی غیرپارامتریک وزن دار بهبود یافته است. نتایج نشان می دهند که روش ارائه شده در اکثر کلاس ها و به ویژه در کلاس های بحرانی که تشابه طیفی بالایی نسبت به هم دارند، بهتر از روش استخراج ویژگی غیرپارامتریک وزن دار عمل کرده است. بهترین نتیجه بدست آمده دارای دقت کلی بیش از ۸۲ درصد با ضریب کاپایی بهتر از ۸۰ درصد بوده است.

کلیدواژه ها: استخراج ویژگی غیرپارامتریک وزن دار (NWFE)، ترکیب خطی، کاهش ابعاد، طبقه بندی.

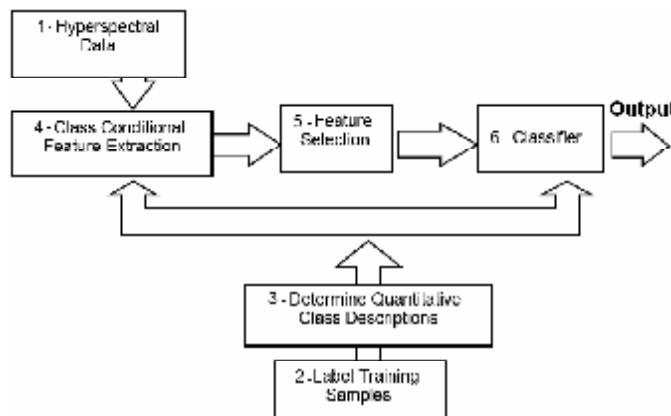
* نویسنده مکاتبه کننده: تهران، خیابان ولی عصر، تقاطع میرداماد، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، دانشکده نقشه برداری، پ. ۱۳۶۴

Email: m_ghamary@yahoo.com

۱- مقدمه

از میان مدل‌هایی که برای طبقه‌بندی داده‌ها در فضاهای با بعد بالا استفاده می‌شوند، مدلی که در سال‌های اخیر بیشتر استفاده می‌شود در شکل ۱ نشان داده شده است. بعد از ورود داده ابرطیفی (باکس ۱)، از طریق تعیین نمونه‌های آموزشی برای هر کلاس (باکس ۲) کلاس‌های مطلوب و مورد نظر مشخص می‌شوند. مراحل مهم بعدی در باکس‌های ۳ و ۴ مشخص شده‌اند که در مقاله حاضر روی این دو مرحله تمرکز بیشتری شده است. در روش‌های طبقه‌بندی فرض بر این است که برای دستیابی به تعریف و توصیفی کمی از کلاس‌ها (باکس ۳)، به تعداد کافی نمونه آموزشی وجود دارد. اما معمولاً در تصاویر ابرطیفی، تعداد نمونه‌های آموزشی مورد استفاده برای هر کلاس کمتر از تعداد بعد از فضاست و قادر به آموزش کامل یک طبقه‌بندی کننده برای این تصاویر نیستند. این امر باعث بروز مشکلاتی مانند پدیده Hughes (Hughes, 1968) و یکتایی ماتریس‌های کوواریانس کلاس‌ها می‌گردد. یکی از مجموعه روش‌هایی که برای حل این مشکلات به کار گرفته می‌شود، روش‌های استخراج ویژگی است (باکس ۴).

داده‌های تصاویر چندطیفی و ابرطیفی، حاوی اطلاعات بسیار مفید و کاربردی از عوارض موجود در زمین هستند. مهمترین کاری که پس از دریافت این داده‌ها صورت می‌پذیرد، استخراج اطلاعات از آنهاست. روش‌های گوناگونی در سطوح مختلف برای دستیابی به هدف استخراج اطلاعات ارائه شده‌اند. از مهمترین راههای استخراج اطلاعات می‌توان به روش‌های طبقه‌بندی اشاره کرد. از این روش‌ها عموماً برای تهیه نقشه‌های موضوعی، و تفاسیر گوناگون (برحسب هدف و نیاز کاربر) استفاده می‌شود. درواقع روش‌های طبقه‌بندی توابعی هستند، که با استفاده از ویژگی‌های طیفی ثبت شده در پیکسل‌ها و همچنین نمونه‌های آموزشی جمع‌آوری شده، برچسب‌هایی را به هر یک از این پیکسل‌ها نسبت می‌دهند که کلاس هر کدام را نشان می‌دهد. یکی از مهمترین و پرکاربردترین روش‌های طبقه‌بندی، روش بیشترین احتمال است. این تابع برای انجام عملیات طبقه‌بندی، نیازمند محاسبه پارامترهای آماری هر کلاس است، که برای برآورد صحیح آنها بایستی مراحل ویژه‌ای طی گرددند.



شکل ۱. نمودار اجمالی برای یک روش تجزیه و تحلیل داده‌های ابرطیفی

منبع: Kuo and Landgrebe, 2001, 2004

مورد بحث، در این مقاله از داده تصویری Indiana Pine استفاده شده است. این داده به وسیله سنجنده AVIRIS در ماه ژوئن ۱۹۹۲، به صورت Airborne در ارتفاع ۲.۰ km از منطقه جنگلی / کشاورزی در ایالت ایندیانا کشور امریکا تصویربرداری شده است. قدرت تفکیک مکانی آن در حد ۲ m و قدرت رادیومتریک آن ۲۲۰ برابر ۱۰ است. این تصویر دارای ۱۶ کلاس و ۲۰۰ باند طیفی است، که در محدوده طیفی μm ۰.۴-۰.۵ μm تهیه شده اند.

باندهای ۱۰۸، ۱۰۴-۱۱۰، ۱۵۰-۱۶۳، و ۲۲۰ آن جزو باندهای جذبی بخار آب هستند، و اطلاعات مفیدی برای استخراج اطلاعات تفکیک پذیری کلاس های مورد نظر در اختیار نمی گذارند. از اینرو، این باندها از لیست باندهای مورد استفاده حذف شدند. از بین ۱۶ کلاس تصویر، ۱۰ کلاس (که دارای بیشترین نمونه های بر جسبدار هستند)، برای بررسی الگوریتم های استخراج ویژگی انتخاب گردیدند. نام کلاس های انتخاب شده و همچنین تعداد نمونه های آنها در جدول ۱ آمده است.

۲-۱- بررسی شباهت طیفی کلاس های تصویر و تعیین کلاس های بحرانی Indiana Pine
آنچه تفکیک پذیری کلاس ها را با دشواری و اشکال مواجه می سازد، درواقع شباهت طیفی آن کلاس هاست. از این رو، در اینجا قبل از به کار گیری داده ها در الگوریتم های استخراج ویژگی، شباهت طیفی آن کلاس ها بررسی شده است. در نوشتار حاضر، شباهت های طیفی کلاس های داده تصویری Indiana و Bhattacharyya Pine با استفاده از معیارهای فاصله (Fukunaga, 1990) و JM مورد ارزیابی قرار گرفته اند (Theodoridis and Koutroumbas, 2003).

1. Non-Parametric Weighted Feature Extraction
2. labeled samples

اکثر روش های استخراج ویژگی براساس محاسبه ماتریس های پراکنده گی داخل کلاسی (S_{ii}) و بین کلاسی (S_{ij}) کلاس های تصویر و بیشینه سازی معیار فیشر ($S_w S^{-1}_w$)، ویژگی های مطلوب را استخراج می کنند. روش استخراج ویژگی غیرپارامتریک وزن دار (NWFE) به دلیل استفاده از همه نمونه های آموزشی کلاس ها و نیز محاسبه میانگین های وزن دار مختلف و ارائه تعریف غیرپارامتریک جدیدی از ماتریس های پراکنده گی داخل کلاسی و بین کلاسی، منجر به دقت های طبقه بندی مناسب تر و مطلوب تری نسبت به سایر روش های استخراج ویژگی (مانند DAFE، Kuo and DBFE، aPAC-LDR (Landgrebe, 2001, 2004) روش نمی تواند پراکنده گی کلاس های بحرانی را بطور کامل مدل کند. در نوشتار حاضر با ارائه تابع وزن جدیدی، تابع وزن به کار رفته در روش NWFE کامل تر شده و بهبود یافته است.

-۲- مواد و روش ها

روش های استخراج ویژگی، روش هایی هستند که با محاسبه ماتریس های پراکنده گی داخل کلاسی (S_{ii}) و بین کلاسی (S_{ij}) و نیز با بیشینه کردن یک معیار مشخص، ویژگی هایی را استخراج می کنند که قادرند در Hughes حل مشکلاتی مانند پدیده (Hughes, 1968) نتیجه طبقه بندی را نیز بهبود بخشند. معیاری که در این مقاله مورد استفاده قرار گرفته، معیار فیشر ($S_w S^{-1}_w$) است، و استخراج گره های ویژگی مورد بررسی، ویژگی های مطلوب را با بیشینه سازی ماتریس آن حاصل می کنند.

-۱-۲- منطقه مورد مطالعه به منظور بررسی و ارزیابی روش های استخراج ویژگی

محسن فمری اصل و همکاران

جدول ۱. نام و تعداد نمونه‌های برچسبدار کلاس‌های انتخاب شده از تصویر Indiana Pine

نام کلاس	برچسب کلاس	تعداد نمونه‌ای برچسبدار کلاس
<i>Bldg-Grass-Tree-Drives</i>	۱	۳۸۰
<i>Hay-windrowed</i>	۲	۴۸۹
<i>Grass/Pasture</i>	۳	۴۹۷
<i>Soybean-clean</i>	۴	۶۱۴
<i>Grass/Trees</i>	۵	۷۴۷
<i>Corn-min</i>	۶	۸۳۴
<i>Soybeans-notill</i>	۷	۹۶۸
<i>Woods</i>	۸	۱۲۹۴
<i>Corn-notill</i>	۹	۱۴۳۴
<i>Soybeans-min</i>	۱۰	۲۴۶۸
Total Samples		۹۷۲۵

جدول ۲. مقادیر معیارهای فاصله *B* و *JM* مربوط به هر زوج کلاس در تصویر Indiana Pine
که براساس همین مقادیر (*B* و *JM*) مرتب شده است.

زوج کلاس		زوج کلاس	
کلاس اول	کلاس دوم	کلاس اول	کلاس دوم
۹	۱۰	۵/۷۴۲۳	۱/۹۹۳۶
۷	۱۰	۶/۷۵۷۴	۱/۹۹۷۷
۶	۱۰	۷/۸۰۴۱	۱/۹۹۹۲
۷	۹	۸/۵۷۹۸	۱/۹۹۹۶
۶	۹	۸/۸۶۶۷	۱/۹۹۹۷
۴	۱۰	۱۰/۸۸۹	۲
۶	۷	۱۱/۵۹۹	۲
۴	۹	۱۳/۹۲۱	۲
۴	۶	۱۴/۵۸۹	۲
۴	۷	۱۴/۹۱۸	۲
۵	۱۰	۱۷/۸۳۶	۲
۱	۸	۱۸/۲۵۹	۲
۵	۷	۱۸/۸۲۶	۲
۳	۵	۱۹/۵۷۲	۲
۵	۹	۲۰/۸۰۹	۲
۵	۸	۲۱/۱۷۸	۲
۳	۱۰	۲۱/۴۶	۲
۳	۸	۲۲/۱۵۷	۲
۱	۵	۲۲/۴۹۱	۲
۳	۷	۲۲/۹۲۲	۲
۳	۹	۲۶/۰۶۵	۲
۴	۵	۲۶/۲۲۸	۲
۳	۴	۲۷/۰۵۴	۲

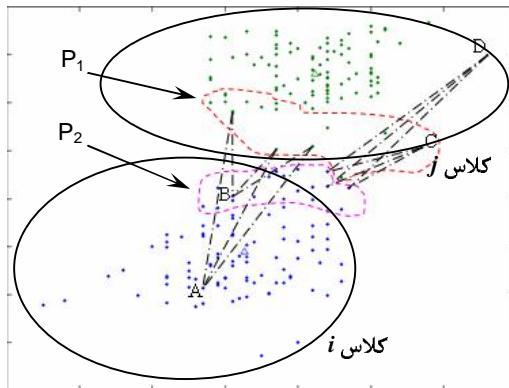
بردن کاتا نزدیک ترین همسایگی، نمی توان تمام اطلاعات پراکندگی دو یا چند کلاس را نسبت به یکدیگر مورد ارزیابی دقیق قرار داد. به عبارت بهتر، همه نمونه های یک کلاس در چگونگی پراکندگی نمونه های آن کلاس نسبت به کلاس های دیگر نقش دارند. شکل ۲، پراکندگی نمونه های آموزشی دو کلاس ن و زر انتشار می دهد.

همان گونه در این شکل (شکل ۲) نیز مشاهده می شود، زوج می شود، تنها بخشی از نمونه های یک کلاس برای محاسبه میانگین آن کلاس و نیز محاسبه پراکندگی آن نسبت به کلاس دیگر مورد استفاده قرار گرفته است (روش NDA). اما تعداد بیشتری از نمونه های آموزشی این کلاس ها در حوالی مرکز آنها پخش شده، و تنها تعداد محدودی از آنها (نمونه های آموزشی) در نزدیکی مرز دو کلاس قرار گرفته اند و همین امر نشان می دهد که برای تعریف کامل یک کلاس، همه نمونه های آن مورد نیاز است و به کار بردن تنها بخشی از نمونه های

همان طور که در جدول ۲ نیز مشاهده می شود، زوج کلاس های حاصل از کلاس های ۶، ۷، ۹، و ۱۰ جزو کلاس های بحرانی^۱ به شمار می آیند و زوج کلاس به دست آمده از کلاس های ۲ و ۸ کمترین شباهت طیفی را با سایر کلاس ها دارند.

۳-۲- روش استخراج ویزگی غیرپارامتریک وزن دار (NWFE)

Fukunaga و Landgrebe در سال ۲۰۰۴ در سال ۱۹۹۰ با روش استخراج ویزگی NDA^۲ نشان دادند که استفاده از اطلاعات محلی و نقاط مرزی بسیار پر اهمیت اند. این روش برای هر نمونه از یک کلاس، یک میانگین محلی را (با استفاده از کاتا نزدیک ترین همسایگی) در کلاس دیگر حساب می کند، و سپس برای محاسبه ماتریس پراکندگی بین کلاسی دو کلاس، پراکندگی نمونه های کلاس اول را بحسب آن میانگین های محلی به دست می آورد. اما تنها با به کار



شکل ۲. پلی گون های P_1 و P_2 نشان می دهند که نزدیک ترین همسایگی های هر یک از کلاس ها تنها در بخش های کوچکی از آنها و در نزدیکی مرز شان، متمرکز شده اند. نقاط A و B (واقع در کلاس i) دارای کاتا نزدیک ترین همسایگی مشترک در کلاس z، و نقاط C و D (واقع در کلاس z) دارای کاتا نزدیک ترین همسایگی مشترک در کلاس i هستند.

۱. کلاس هایی که پراکندگی نمونه های آن نسبت به یک کلاس خاص، به گونه ای است که به سادگی تفکیک شدنی نیستند.
2. Nonparametric Discriminant Analysis

صفرو در غیر این صورت به سمت ۱ میل خواهد کرد.
از روش NDA می‌دانیم، که نقاط مرزی باید در
محاسبه ماتریس‌های پراکنده‌گی، وزن بیشتری را نسبت
به نقاط دورتر از مرز داشته باشند. روش NWFE این
وزن را به صورت زیر تعریف می‌کند:

$$\lambda_l^{(i,j)} = \frac{\text{dist}(\mathbf{x}_l^{(i)}, M_j(\mathbf{x}_l^{(i)}))^{-1}}{\sum_{t=1}^{N_i} \text{dist}(\mathbf{x}_t^{(i)}, M_j(\mathbf{x}_t^{(i)}))^{-1}} \quad \text{رابطه (۳)}$$

که در این رابطه، $\lambda_l^{(i,j)}$ تابع وزنی است که بایستی
بر بردارهای بین کلاسی اعمال گردد.

تابع وزن $w_{lk}^{(i,j)}$ تشابه زیادی به تابع وزن
دارد، از این‌رو خصوصیات آن نیز بسیار مشابه
خصوصیات تابع وزن $w_{lk}^{(i,j)}$ خواهد بود:

۱. با به کار بردن معکوس فاصله، نمونه‌های
نزدیک‌تر به مرز دارای وزن بیشتر و نمونه‌های دورتر از
آن دارای وزن کمتری خواهند شد. بدین ترتیب، مشکل
نمونه‌های Outlier نیز از بین می‌رود.

۲. مجموع وزن‌های $\lambda_l^{(i,j)}$ ، برای تمام نمونه‌های
کلاس i ، $d = 1, 2, \dots, N_i$ برابر ۱ است (۱)

۳. هر چه فاصله اقلیدسی بین نمونه $\mathbf{x}_l^{(i)}$ و میانگین
متناظرش در کلاس j ($M_j(\mathbf{x}_l^{(i)})$)، افزایش یابد، آنگاه
مقدار وزن $\lambda_l^{(i,j)}$ به سمت صفر و در غیر این صورت به
سمت ۱ میل خواهد کرد.

روش NWFE با استفاده از تابع وزن $\lambda_l^{(i,j)}$ ، ماتریس
پراکنده‌گی بین کلاسی (S_b) را به صورت غیریارامتریک
رابطه (۴) ارائه می‌دهد:

$$\text{رابطه (۴)}$$

$$S_b^{\text{NW}} = \sum_{i=1}^L P_i \sum_{j=1}^L \sum_{l=1}^{N_i} \sum_{k=1}^{N_j} \frac{\lambda_l^{(i,j)}}{N_i} (\mathbf{x}_l^{(i)} - M_j(\mathbf{x}_l^{(i)})) (\mathbf{x}_l^{(i)} - M_j(\mathbf{x}_l^{(i)}))^T$$

۱. نمونه‌هایی که در فواصل دورتر نسبت به یک نمونه مشخص
قرار گرفته‌اند، و از نظر پراکنده‌گی حالت بحرانی ندارند و به آسانی
از آن تفکیک‌پذیرند.

آموزشی نمی‌تواند بیان خوبی از خود کلاس به ما بدهد.
بنابراین، برای بیان بهتر و دقیق‌تر پراکنده‌گی بین دو
کلاس، بایستی از همه نمونه‌های آموزشی آن کلاس‌ها
بهره گرفت و همه آنها را در محاسبه ماتریس S_b
شرکت داد. در عین حال، باید به گونه‌ای عمل شود که
نمونه‌های Outlier هر نمونه مشخص وزن کمتر و
داده‌های نزدیک‌تر به آن، وزن بیشتری را به خود
اختصاص دهند.

برای رسیدن به این مقصود، روش NWFE تعریف
جدیدی از وزن را ارائه کرده است. این وزن از فاصله
اقلیدسی بین دو نمونه استفاده می‌کند و به صورت ذیل
 تشکیل می‌یابد (Kuo and Landgrebe, 2001, 2004):

$$w_{lk}^{(i,j)} = \frac{\text{dist}(\mathbf{x}_l^{(i)}, \mathbf{x}_k^{(j)})^{-1}}{\sum_{t=1}^{N_j} \text{dist}(\mathbf{x}_l^{(i)}, \mathbf{x}_t^{(j)})^{-1}} \quad \text{رابطه (۱)}$$

که در آن $\text{dist}(\mathbf{x}_l^{(i)}, \mathbf{x}_k^{(j)})$ بیانگر فاصله اقلیدسی
بین نمونه i کلاس i و نمونه k کلاس j و
تابع وزن مربوط به $\mathbf{x}_k^{(j)}$ و متناظر با $\mathbf{x}_l^{(i)}$ است.
میانگین کلاس j به ازای $\mathbf{x}_l^{(i)}$ از طریق مجموع
وزن دار نمونه‌های آن (کلاس j) حاصل می‌شود:

$$M_j(\mathbf{x}_l^{(i)}) = \sum_{k=1}^{N_j} w_{lk}^{(i,j)} \mathbf{x}_k^{(j)} \quad \text{رابطه (۲)}$$

در این رابطه، $(\mathbf{x}_l^{(i)})_j M_j(\mathbf{x}_l^{(i)})$ میانگین کلاس j ، متناظر
با نمونه $\mathbf{x}_l^{(i)}$ است.

۱. با به کار بردن معکوس فاصله، نمونه‌های
نزدیک‌تر به $\mathbf{x}_l^{(i)}$ دارای وزن بیشتر و نمونه‌های دورتر از
آن دارای وزن کمتری خواهند شد. بدین ترتیب، مشکل
نمونه‌های Outlier نیز از بین می‌رود.

۲. مجموع وزن‌های $w_{lk}^{(i,j)}$ ، برای تمام نمونه‌های
کلاس j ، $j = 1, 2, \dots, N_j$ برابر ۱ است (۱).

۳. هر چه فاصله اقلیدسی بین نمونه‌های $\mathbf{x}_k^{(j)}$
و $\mathbf{x}_l^{(i)}$ ، افزایش یابد، آنگاه مقدار وزن $w_{lk}^{(i,j)}$ به سمت

اشکال روش NWFE نیز در این است که توابع وزن مورد استفاده در آن ($W_{ik}^{(i,j)}$ و $\lambda_i^{(i,j)}$) تنها از یک پارامتر فاصله استفاده می کنند، در حالی که علاوه بر فاصله بین دو نمونه، رابطه ترکیب خطی بین آنها نیز در تعیین میزان شباهت طیفی آنها مؤثر است و آزمایش ها نشان داده اند که لزوماً فاصله کوتاه تر بیانگر میزان شباهت طیفی بیشتر نیست.

۴-۲ روش پیشنهادی استخراج ویژگی ترکیب خطی غیرپارامتریک وزن دار^۲ (LC-NWFE)
روش LC-NWFE برای رفع عیب روش NWFE ارائه شده است (Ghamary Asl et al., 2006). در روش استخراج ویژگی غیرپارامتریک وزن دار (NWFE) تنها از فاصله بین هر زوج نمونه برای تشکیلتابع وزن استفاده می گردد. اما، فقط با استفاده از این عامل نمی توان وزن یک نمونه را در قبال نمونه دیگر به طور کامل مشخص کرد. مسئله این است که نمونه های آموزشی موجود در یک کلاس بایستی در همه باندهای ترکیب خطی از یکدیگر باشند و از طرفی نمونه های آموزشی موجود در دو کلاس متفاوت باشند. هر چه میزان شباهت طیفی دو از یکدیگر داشته باشند. هر چه افزایش خواهد یافت (شکل ۳). هر چه واپسگی بین دو نمونه بیشتر گردد، آنگاه می توان مقادیر یکی از آن دو نمونه را (تقرباً در تمام باندها) تا حد زیادی به وسیله نمونه دیگر برآورد کرد. عکس این مطلب نیز صادق است (شکل ۴)، یعنی اگر استقلال خطی بین دو نمونه بالا باشد، آنگاه آن دو نمونه برآورد مناسبی را از یکدیگر به دست نخواهند داد؛ باید در نظر داشت که این وضعیت با کاهش شباهت طیفی بین کلاس ها شدیدتر می شود.

1. regularization
2. Linear Combination-Nonparametric Weighted Feature Extraction

در این روش، تعریف جدید غیرپارامتریکی نیز از ماتریس پراکنده گی داخلی کلاسی ارائه شده است:

رابطه (۵)

$$S_w^{NW} = \sum_{i=1}^L P_i \sum_{l=1}^{N_i} \frac{\lambda_l^{(i,i)}}{N_i} \left(\mathbf{x}_l^{(i)} - M_i(\mathbf{x}_l^{(i)}) \right) \left(\mathbf{x}_l^{(i)} - M_i(\mathbf{x}_l^{(i)}) \right)^T$$

در روابط (۴) و (۵)، P_i و N_i به ترتیب، تعداد نمونه های آموزشی کلاس های i و ز هستند و ضریب P_i بیانگر پیش احتمال کلاس i است:

$$P_i = \frac{N_i}{\sum_{c=1}^L N_c}$$

روش NWFE برای غلبه بر مشکل یکتایی ماتریس S_w^{NW} که آن را با یکی از روش های عادی سازی^۱ (Kuo and Landgrebe, 2001) برآورد می کند:

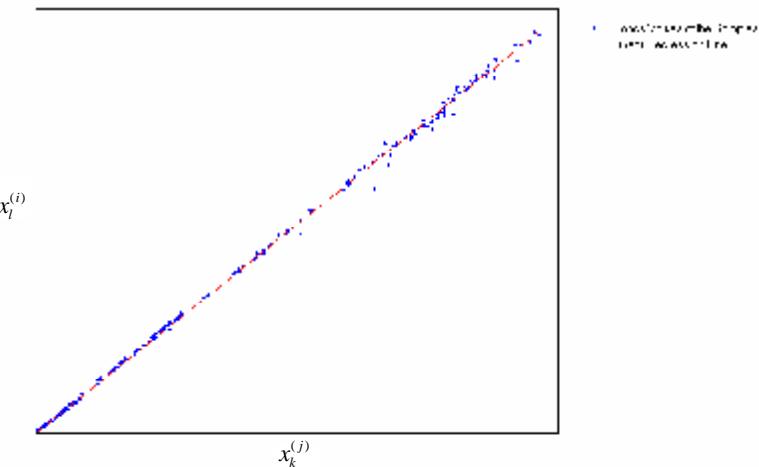
رابطه (۶)

$$S_{w_{regularized}}^{NW} = ./.5 S_w^{NW} + ./.5 \text{diag}(S_w^{NW})$$

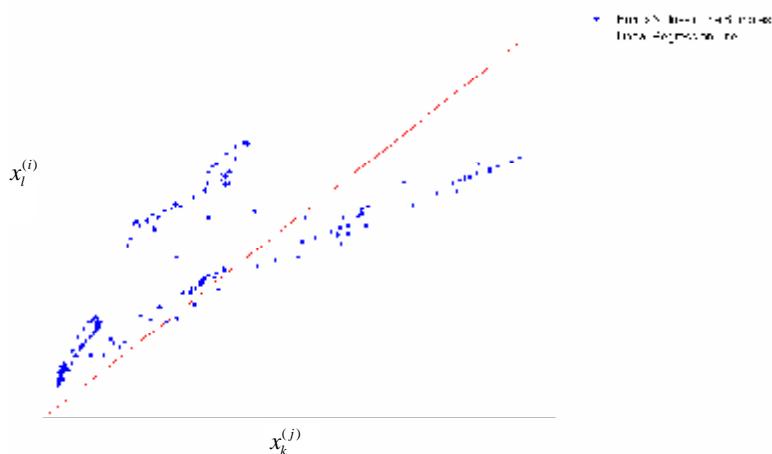
که در این رابطه، $S_{w_{regularized}}^{NW}$ ماتریس پراکنده گی داخل کلاسی عادی سازی شده و $\text{diag}(S_w^{NW})$ شکل قطری ماتریس پراکنده گی داخل کلاسی (S_w^{NW}) است.

- مزایای روش NWFE را می توان چنین برشمرد:
۱. استخراج بیش از $L-1$ ویژگی؛
 ۲. رسیدن به دقیت های بالاتر در تعداد ویژگی های کمتر؛
 ۳. بالا رفتن دقیقت بندی در مقایسه با روش های قبلی؛

۴. حذف شکل یکتایی ماتریس پراکنده گی داخل کلاسی (که خود باعث کاهش تعداد مجھولات می شود)؛ و
۵. پوشش دادن تمام نمونه ها و استفاده از همه اطلاعات موجود در کلاس ها (که سبب ارزیابی دقیق تر پراکنده گی آنها نسبت به یکدیگر می گردد).



شکل ۳. پراکندگی مقادیر باندهای یک نمونه از کلاس i در مقابل مقادیر باندهای یک نمونه از کلاس j ، زمانی که نمونه‌های کلاس‌های i و j دارای شباهت طیفی بسیار بالایی هستند.



شکل ۴. پراکندگی مقادیر باندهای یک نمونه از کلاس i در مقابل مقادیر باندهای یک نمونه از کلاس j ، زمانی که نمونه‌های کلاس‌های i و j دارای شباهت طیفی بسیار پایینی هستند.

برآورد خوبی را از هم حاصل کردند. اما در شکل ۴ درست عکس این مطلب اتفاق افتاده است. برآورد یک نمونه از طریق نمونه دیگر را می‌توان به صورت رابطه شکل ۳ دو نمونه مورد بررسی، در تمام باندها شباهت طیفی بسیار زیادی به یکدیگر دارند و به همین دلیل در شکل‌های ۳ و ۴ خط برآژش درواقع شامل مقادیر برآورد شده نمونه $x_k^{(i)}$ از نمونه $x_l^{(j)}$ است. در

$$\hat{x}_l^{(i)} = ax_k^{(j)} \Rightarrow \text{RMSE}\left(x_l^{(i)}, x_k^{(j)}\right) = \sqrt{\left((x_l^{(i)} - \hat{x}_l^{(i)})^t (x_l^{(i)} - \hat{x}_l^{(i)})\right)} \quad \text{رابطه (7)}$$

باید توجه داشت که با محاسبه وزن های فوق، ماتریس های پراکندگی داخل کلاسی و بین کلاسی به روش مشابه در استخراج گر ویژگی NWFE حاصل می شوند. در این روش نیز ویژگی های مطلوب با بیشینه کردن معیار فیشر به دست می آیند.

۳- نتایج

برای بررسی و ارزیابی الگوریتم های فوق، هر دو روش در محیط برنامه نویسی MATLAB پیاده سازی و بر روی داده تصویری منطقه Pine Indiana (بخش ۱-۲) آزمایش شدند.

به منظور ارزیابی روش های استخراج ویژگی غیرپارامتریک وزن دار (NWFE) و روش ترکیب خطی - غیرپارامتریک وزن دار (LC-NWFE) ۱۵ مجموعه داده از داده تصویری Pine مورد استفاده قرار گرفتند که در هر یک از آنها برای هر کلاس، ۶۰ تا نمونه آموزشی (به صورت تصادفی) انتخاب شد و بقیه نمونه ها به عنوان نمونه های آزمایشی در نظر گرفته شدند.

پس از استخراج ویژگی ها از طریق روش های NWFE و LC-NWFE، با به کار گیری ۱ تا ۲۰ ویژگی که به ازای هر تعداد ویژگی، ۱۵ مجموعه داده مذکور استفاده شدند، اقدام به طبقه بندی تصویر به روش بیشترین احتمال^۲ گردید.

در مجموع ۳۰۰ بار طبقه بندی برای هر روش انجام گرفت که در ادامه به منظور ارزیابی نتایج آنها، بهترین نتیجه به دست آمده، بدون توجه به تعداد ویژگی های به کار گرفته در هر کدام از روش ها (بدین معنا که ممکن است بهترین نتیجه برای دو روش فوق در تعداد ویژگی های یکسان رخ ننمهد) و تنها بر اساس دقت کاپای حاصل شده برای هر کدام، مورد استفاده قرار می گیرد.

1. Residual Mean Square Error
2. Maximum Likelihood

در رابطه مذکور، a پارامتر ترکیب خطی بین نمونه های $x_l^{(i)}$ و $x_k^{(j)}$ برآورد نمونه ۱-ام کلاس i از طریق نمونه k-ام کلاس j، و ریشه مجموع مربعات خطای^۱ (RMSE) بیانگر فاصله بین مقدار برآورد شده $\hat{x}_l^{(i)}$ و مقدار واقعی $x_l^{(i)}$ است.

هر چه مقدار برآورد شده به مقدار واقعی نزدیک تر باشد (شکل ۳) آنگاه مقدار ریشه مجموع مربعات خطای (RMSE) کوچک تر خواهد شد، و بر عکس، بنابراین، می توان از RMSE حاصل از ترکیب خطی بین هر زوج نمونه، برای تکمیلتابع وزن به کار رفته در روش NWFE و بهمود نتایج این روش استفاده کرد. در این روش توابع وزن مورد نظر به صورت رابطه (۸) معرفی می گردد:

$$\text{رابطه (۸)}$$

$$w_{lk}^{(i,j)} = \frac{\text{dist}\left(x_l^{(i)}, x_k^{(j)}\right)^{-1} \times \text{RMSE}\left(x_l^{(i)}, x_k^{(j)}\right)^{-1}}{\sum_{t=1}^{N_j} \text{dist}\left(x_l^{(i)}, x_t^{(j)}\right)^{-1} \times \text{RMSE}\left(x_l^{(i)}, x_t^{(j)}\right)^{-1}}$$

$w_{lk}^{(i,j)}$ وزنی است که در این روش معرفی شده است. برای افزایش نقش کلاس های بحرانی، معکوس RMSE مورد استفاده قرار گرفته است. با استفاده از این وزن، میانگین به صورت زیر محاسبه می شود (که همان شیوه به کار گرفته شده در روش NWFE است):

$$M_j(x_l^{(i)}) = \sum_{k=1}^{N_j} w_{lk}^{(i,j)} x_k^{(j)} \quad \text{رابطه (۹)}$$

$M_j(x_l^{(i)})$ میانگین کلاس j، متناظر با نمونه $x_l^{(i)}$ است.

با استفاده از $(x_l^{(i)})_j$ وزن $\lambda_l^{(i,j)}$ به کمک رابطه (۱۰) محاسبه می گردد.

$$\text{رابطه (۱۰)}$$

$$\lambda_l^{(i,j)} = \frac{\text{dist}\left(x_l^{(i)}, M_j(x_l^{(i)})\right)^{-1} \times \text{RMSE}\left(x_l^{(i)}, M_j(x_l^{(i)})\right)^{-1}}{\sum_{t=1}^{N_j} \text{dist}\left(x_l^{(i)}, M_j(x_t^{(i)})\right)^{-1} \times \text{RMSE}\left(x_l^{(i)}, M_j(x_t^{(i)})\right)^{-1}}$$

۳-۱- ارزیابی استخراج ویژگی غیرپارامتریک وزن دار (NWFE)

مناسبی برای نمایش و تعریف کلاس‌ها هستند و نیز ویژگی‌های استخراج شده از طریق NWFE به خوبی توائسه‌اند آنها را طبقه‌بندی کنند.

علاوه بر موارد مذکور، با توجه به پارامترهای تفکیک‌پذیری جدول ۲ که قیل از استخراج ویژگی در فضای کامل داده‌ها محاسبه گردیده‌اند، می‌توان مشاهده کرد که کلاس‌های ۲، ۴، ۵ و ۸ که در فضای اولیه دارای تفکیک‌پذیری مناسبی هستند، پس از به کارگیری استخراج‌گر ویژگی غیرپارامتریک وزن دار نیز از سایر کلاس‌ها به خوبی مجرزا شده‌اند. در عین حال کلاس‌های ۶، ۷، ۹ و ۱۰ که طبق جدول ۲ دارای شباهت طیفی بسیار بالایی هستند، به وسیله روش استخراج ویژگی NW با دقت طبقه‌بندی نسبتاً خوبی از سایر کلاس‌ها تفکیک گردیده‌اند. این در حالی است که کلاس ۱ (با توجه به این که جزو کلاس‌های بحرانی نیست) با دقت مناسبی جدا نشده است.

در ادامه، ماتریس خطای بهترین نتیجه حاصل از ۳۰۰ بار طبقه‌بندی براساس بیشترین مقدار دقت کاپا آمده است (جدول ۳). لازم به ذکر است که این نتیجه (برای روش NWFE) در استفاده از ۱۰ ویژگی استخراج شده، حاصل گردیده است.

با توجه به جدول ماتریس خطای فوق و ستون Product Accuracy آن (جدول ۳) می‌توان گفت که کلاس‌های ۱، ۲، ۴، ۵ و ۸ به خوبی طبقه‌بندی شده‌اند، و کلاس‌های ۶، ۷، ۹ و ۱۰ دارای دقت طبقه‌بندی نسبتاً مناسبی هستند. علت این امر را می‌توان در چگونگی انتخاب نمونه‌های آموزشی این کلاس‌ها در مجموعه داده متناظر با ماتریس خطای فوق (جدول ۳) و همچنین در توانمندی ویژگی‌های استخراج شده به وسیله روش NW در جداسازی کلاس‌ها جستجو جو کرد. بدین معنی که این نمونه‌های آموزشی نماینده‌های

جدول ۳. ماتریس خطای بهترین نتیجه حاصل از ۳۰۰ بار طبقه‌بندی داده تصویری Indiana Pine، که به وسیله ویژگی‌های استخراج شده از روش NWFE انجام شده‌اند. این نتیجه در استفاده از ۱۰ ویژگی استخراج شده، حاصل گردیده است.

Class Number	Product Accuracy (%)	Number of Test Samples	Class Number									
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	75.6	320	242	0	10	3	4	1	0	60	0	0
2	98.8	429	5	424	0	0	0	0	0	0	0	0
3	92.7	437	9	0	405	13	1	0	0	8	0	1
4	94.8	554	4	0	3	525	0	10	5	0	0	7
5	91	687	56	0	3	0	625	0	1	1	0	1
6	75.8	774	1	0	0	101	0	587	0	0	24	61
7	80.7	908	6	0	7	0	5	27	733	0	48	82
8	92.6	1234	88	0	3	0	0	0	0	1143	0	0
9	77.1	1374	10	0	3	16	4	50	88	0	1059	144
10	68.9	2408	13	0	24	241	1	125	144	0	201	1659
Total		9125	434	424	458	899	640	800	971	1212	1332	1955
User Accuracy (%)		55.8	100	88.4	58.4	97.7	73.4	75.5	94.3	79.5	84.9	
Overall Accuracy:		81.1%										Kappa Accuracy: 78.2%

بدین معنی که این نمونه های آموزشی نماینده های مناسبی برای نمایش و تعریف کلاس ها به شمار می آیند و ویژگی های استخراج شده از طریق LC-NWFE نیز به خوبی آنها را طبقه بندی کرده اند.

علاوه بر موارد مذکور، با توجه به پارامترهای تفکیک پذیری جدول ۲، می توان مشاهده کرد که کلاس های ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۸ که در فضای اولیه دارای تفکیک پذیری مناسبی هستند، پس از به کار گیری استخراج گر ویژگی LC-NW نیز از سایر کلاس ها به خوبی مجزا شده اند. این در حالی است که، کلاس های ۶، ۷، ۹ و ۱۰ (که طبق جدول ۲ دارای شباهت طیفی بسیار بالایی هستند)، به وسیله روش استخراج ویژگی LC-NW به خوبی و با دقت طبقه بندی مناسبی از سایر کلاس ها تفکیک گردیده اند. ضمناً طبقه بندی کلاس ۱ (با توجه به این که جزو کلاس های بحرانی به شمار نمی آید) پس از استفاده از روش LC-NW دقت مناسبی یافته است.

۲-۳- ارزیابی استخراج گر ویژگی ترکیب

غیرخطی پارامتریک وزن دار (LC-NWFE)

در ادامه، ماتریس خطای بهترین نتیجه حاصل از ۳۰۰ بار طبقه بندی براساس بیشترین مقدار دقت کاپا آمده است (جدول ۴). لازم به ذکر است که این نتیجه (برای روش LC-NWFE) در استفاده از ۱۱ ویژگی استخراج شده، حاصل گردیده است.

با توجه به جدول ماتریس خطای فوق و سنتون Product Accuracy آن (جدول ۴) می توان گفت که کلاس های ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۸ به خوبی طبقه بندی شده اند و کلاس های ۶، ۷، ۹ و ۱۰ دارای دقت طبقه بندی مناسبی هستند. علت این امر را می توان در چگونگی انتخاب نمونه های آموزشی این کلاس ها در مجموعه داده متناظر با ماتریس خطای فوق (جدول ۴) و همچنین در توانمندی ویژگی های استخراج شده به وسیله روش LC-NW در جداسازی کلاس ها جستجو کرد.

جدول ۴. ماتریس خطای بهترین نتیجه حاصل از ۳۰۰ حالت طبقه بندی داده تصویری Indiana Pine که از طریق ویژگی های استخراج شده از روش LC-NWFE انجام شده اند. این نتیجه در استفاده از ۱۱ ویژگی استخراج شده، حاصل گردیده است.

Class Number	Product Accuracy (%)	Number of Test Samples	Class Number									
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	79.1	320	253	0	2	3	5	1	0	56	0	0
2	98.8	429	5	424	0	0	0	0	0	0	0	0
3	95.7	437	3	0	418	13	1	0	0	1	0	1
4	94	554	6	0	2	521	0	11	5	0	2	7
5	94	687	35	0	2	0	646	0	0	3	0	1
6	81	774	1	0	0	53	0	627	1	0	26	66
7	83.6	908	3	0	5	2	7	18	759	0	32	82
8	93.4	1234	78	0	3	0	1	0	0	1152	0	0
9	81.1	1374	6	0	5	8	3	61	80	0	1114	97
10	68.3	2408	8	0	32	250	3	135	151	0	185	1644
Total		9125	398	424	469	850	666	853	996	1212	1359	1898
User Accuracy (%)		63.6	100	89.1	61.3	97	73.5	76.2	95	82	86.6	
Overall Accuracy: 82.8%										Kappa Accuracy: 80.2%		

۴- بحث و نتیجه‌گیری

بدیهی است که مهمترین هدف در طبقه‌بندی، دستیابی به بهترین دقت جداسازی کلاس‌های تصویر است. از این‌رو می‌توان گفت که آنچه در بررسی ۳۰۰ بار طبقه‌بندی (برای هر روش) اهمیت دارد، این است که کدام روش در مجموع، بهترین دقت طبقه‌بندی را حاصل کرده است.

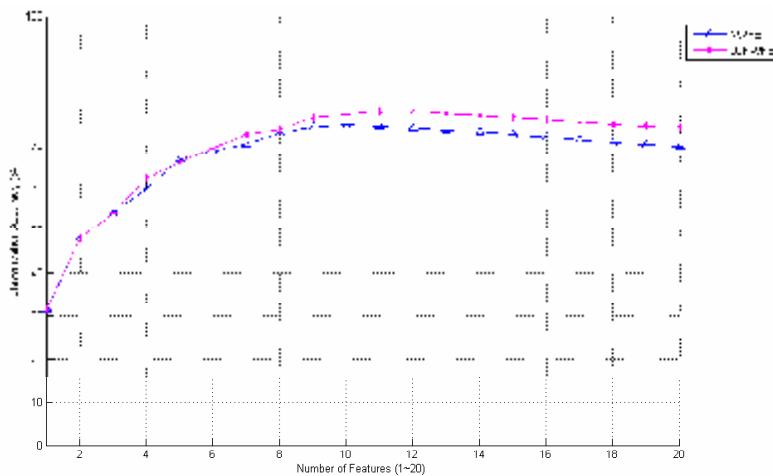
با مقایسه جداول ۳ و ۴ مشاهده می‌شود که میزان دقت‌های طبقه‌بندی کلاس‌های بحرانی ۶، ۷ و ۹ در جدول ۴ (که از طریق ویژگی‌های استخراج شده بهوسیله روش LC-NWFE حاصل شده‌اند) در مقایسه با مقادیر متناظر شان در جدول ۳ (که از طریق ویژگی‌های استخراج شده بهوسیله روش NWFE حاصل گردیده‌اند) بسیار بالاتر است. دلیل این امر را می‌توان در اعمال تابع وزن جدید دانست که پراکندگی کلاس‌های بحرانی را نسبت به هم و نسبت به کلاس‌های دیگر بهتر تعریف می‌کند. از طرفی، نتایج طبقه‌بندی کلاس‌های ۲ و ۸ در جدول‌های ۳ و ۴ تغییرات شاخصی ندارند، چرا که به دلیل تشابه بسیار کم آنها (جدول ۳)، هر دو روش توانسته‌اند به خوبی آنها را طبقه‌بندی کنند. اما کلاس‌های ۳ و ۵ بعد از اعمال استخراج گر ویژگی LC-NWFE دارای دقت‌های طبقه‌بندی بهتر و مناسب‌تری نسبت به نتایج حاصل از روش NWFE (جدول ۳) شده‌اند. همان‌طور که اشاره شد، کلاس‌های ۲ و ۸ شباهت طیفی بسیار کمی با سایر کلاس‌ها دارند، لیکن کلاس‌های ۳ و ۵ با برخی کلاس‌ها تشابه طیفی بالایی دارند (مانند زوج کلاس‌های (۳، ۱۰) و (۵، ۱۰)) و این امر بیان می‌دارد که روش LC-NWFE حساسیت بالاتری نسبت به کلاس‌های Outlier و نیز کلاس‌های بحرانی دارد و نقش کلاس‌های بحرانی را در محاسبه ماتریس‌های پراکندگی داخل کلاسی و بین کلاسی بیش از پیش افزایش می‌دهد. از این‌رو، استخراج گر ویژگی LC-NWFE زمانی که وضعیت کلاس‌ها بحرانی‌تر باشد بهتر از روش NWFE عمل خواهد کرد.

لازم به ذکر است که در این روش دقت نتیجه طبقه‌بندی کلاس ۱ در مقایسه با روش NWFE افزایش شدیدی یافته است، که علت این امر را می‌توان در چگونگی انتخاب نمونه‌های آموزشی این کلاس در مجموعه داده متناظر با ماتریس خطای فوق (جدول ۴) و توانمندی ویژگی‌های استخراج شده بهوسیله روش LC-NWFE در جداسازی کلاس ۱ از سایر کلاس‌ها جست‌وجو کرد. بدین معنی که این نمونه‌های آموزشی نماینده‌های مناسبی برای نمایش و تعریف کلاس ۱ بهشمار می‌آیند و نیز ویژگی‌های استخراج شده از طریق استخراج گر ویژگی LC-NWFE به خوبی توانسته‌اند که این کلاس را از سایر کلاس‌ها جدا کنند.

بررسی نتیجه طبقه‌بندی کلاس ۱۰ نشان می‌دهد که نتایج حاصل برای دو روش NWFE و LC-NWFE تغییرات عمده‌ای نسبت به هم ندارند، که دلیل آن نیز می‌تواند در چگونگی انتخاب نمونه‌های آموزشی این کلاس در مجموعه داده متناظر با ماتریس خطای فوق (جدول ۴) و ویژگی‌های استخراج شده بهوسیله روش LC-NWFE باشد؛ بهطوری که هیچ یک از این دو عامل (چگونگی انتخاب نمونه‌های آموزشی و ویژگی‌های استخراج شده) توانسته‌اند تأثیری جدی بر جداسازی کلاس ۱ از سایر کلاس‌ها بگذارند.

به‌منظور مقایسه بهتر روش‌های استخراج ویژگی NW و LC-NW، نتایج حاصل از ارزیابی آنها در شکل ۵ ترکیب شده و در قالب دو نمودار نمایش داده شده است. در ضمن نتایج مربوط به نمودارهای موجود در این شکل در جدول ۵ آمده‌اند که بیشترین مقادیر حاصل برای هر روش با هاشور مشخص گردیده‌اند. اعداد واقع در ستون Features این جدول بیان‌گر تعداد ویژگی‌های استفاده شده برای طبقه‌بندی هستند.

شکل ۵ و جدول ۵، به خوبی نشان می‌دهند که در همه ویژگی‌ها (به جز ویژگی ۵، که اختلافشان بسیار LC-NWFE جزئی است)، نتایج دقت کاپای حاصل از روش NWFE بهتر از نتایج متناظر به‌دست آمده از روش NWFE هستند.



شکل ۵. نتایج طبقه‌بندی تصویر Indiana Pine با استفاده از ویژگی‌های استخراج شده به‌وسیله روش‌های NWFE و LC-NWFE

جدول ۵. مقادیر میانگین‌های دقت‌های کاپای حاصل از روش‌های NWFE و LC-NWFE

Features	NW	LC-NW
1	31.624	31.835
2	48.072	48.077
3	54.159	54.067
4	59.799	62.224
5	66.704	66.021
6	68.663	69.431
7	70.346	72.435
8	72.793	73.687
9	74.257	76.62
10	74.719	77.095
11	74.506	77.919
12	73.995	77.808
13	73.486	77.407
14	72.974	76.885
15	72.533	76.356
16	71.949	75.87
17	71.287	75.321
18	70.609	74.834
19	70.231	74.357
20	69.832	74.044

داراست و علاوه بر این بر عیب آن نیز غلبه می‌کند و با روش LC-NWFE که در این مقاله ارائه گردید، همه مزایای استخراج‌گر ویژگی غیریارامتریک وزن دار را تعریف توابع وزن جدید، توابع وزن تعریف شده در

Ghamary Asl M., Mobasher M.R., Valadan Zouj M.J., Mojarradi B., 2006, **Using Nonparametric Weighted Feature Extractor for Dimensionality Reduction of the Hyperspectral Images**, M.Sc. Thesis, Remote Sensing Department, Faculty of Geodesy and Geomatics, Khajeh Nasir-addin Toosi University.

Hughes G.F., 1968, **On the Mean Accuracy of Statistical Pattern Recognition**, IEEE Trans. Information Theory, Vol. IT-14, No. 1, pp. 55-63.

Kuo B-C. and Landgrebe D.A., 2001, **Improved Statistics Estimation And Feature Extraction for Hyperspectral Data Classification**, Ph.D. Thesis and School of Electrical & Computer Engineering Technical Report, TR-ECE 01-6.

Kuo B-C. and Landgrebe D.A., 2004, **Nonparametric Weighted Feature Extraction for Classification**, IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, Vol. 42 No. 5, pp. 1096-1105.

Theodoridis S. and Koutroumbas K., 2003, **Pattern Recognition**, Department of Informatics and Telecommunications, University of Athens, Greece: Academic Press Inc., Second Edition.

روش NWFE را کامل تر می کند. این وزن های جدید، نقش کلاس های بحرانی را پر نگتر و نقش کلاس های Outlier را کم نگتر می کنند.

ارزیابی ها و مقایسه های واقع در بخش ۳ نشان می دهند که:

۱. روش LC-NWFE تقریباً در مورد همه کلاس ها و بهویژه در مورد کلاس های بحرانی، عملکرد بهتری در مقایسه با روش NWFE دارد.

۲. روش LC-NWFE در تعداد ویژگی های برابر، دقتهای طبقه بندی مطلوب تری را به دست می دهد. به عنوان مثال، روش NWFE با استفاده از ۱۰ تا ویژگی، دقیق ۷۴/۷۲ درصد را برای طبقه بندی حاصل کرده است، در حالی که روش LC-NWFE با استفاده از همین تعداد ویژگی، دقیق ۷۷/۱۰ درصد را برای طبقه بندی تصویر Indiana Pine به دست داده است.

۳. در روش LC-NWFE پدیده Hughes در مقایسه با روش NWFE دیرتر رخ می دهد.

۴. با افزایش تعداد ویژگی های مورد استفاده، اختلاف بین نتایج روش های LC-NWFE و NWFE نیز افزایش می یابد.

۵. روش LC-NWFE توانسته است در تعداد ویژگی های کمتر به دقتهای طبقه بندی بالاتری در مقایسه با روش NWFE برسد. برای مثال روش NWFE در ۱۰ تا ویژگی، دقیق ۷۴/۷۲ درصد (که بالاترین دقیق میانگین آن است) و روش LC-NWFE با استفاده از ۹ ویژگی، دقیق ۷۶/۶۲ درصد را (که بالاترین دقیق میانگین آن نیست) به دست داده است.

۵- منابع

Fukunaga K., 1990, **Introduction to Statistical Pattern Recognition**, Second Ed., Boston, Academic Press, pp. 445-479.