



نسخه از دور & GIS ایران



سنجش از دور و GIS ایران
Iranian Remote Sensing & GIS

سال اول، شماره اول، بهار ۱۳۸۸
Vol.1, No.1, Spring 2009

۱-۱۶

حساب دوگان گراف و کاربردهای آن در GIS

جواد صابریان^{۱*}، محمدرضا ملک^۲، مجید همراه^۳، استغن وینتر^۳

۱- دانشجوی دکتری GIS در دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

۲- استادیار گروه مهندسی GIS دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

۳- استاد گروه GIS دانشگاه ملیورن استرالیا

تاریخ پذیرش مقاله: ۸۸/۸/۲

تاریخ دریافت مقاله: ۸۸/۵/۴

چکیده

برای حل برخی از مشکلات، یا برای ساده‌سازی آنالیزها در گراف، می‌توان تغییراتی را در ساختار آن ایجاد کرد. دوگان گراف یکی از مصادیق این تغییر محسوب می‌شود. دوگان گراف خطی یکی از انواع تعریف‌شده دوگان گراف است که برای بیان گراف‌های دارای گره‌های وزن دار پیشنهاد شده است. در این مقاله مفهومی به عنوان حساب دوگان گراف خطی، بر مبنای این دوگان گراف معرفی شده است. برای این منظور، دوگان خطی (LD_1) و دوگان خطی معکوس (LD_{-1}) معرفی، و نحوه استخراج آنها شرح داده می‌شود. همچنین نشان داده خواهد شد که این چارچوب می‌تواند کاربردهای فراوانی داشته باشد. یکی از مهم‌ترین کاربردهای آن، یافتن دور همیلتونی در گراف است. به عبارت دیگر، با استفاده از تبدیلات بین دوگان گراف و گراف اولیه می‌توان دورهای همیلتونی را، که تا کنون یافتن آنها در گراف بسیار دشوار بوده است، به دورهای اوپلری تبدیل کرد. بدین‌وسیله حل مسائل بسیار ساده‌تر خواهد شد. دور همیلتونی کاربردهای فراوانی در حوزه GIS و علوم مرتبط با اطلاعات مکانی دارد. از آن جمله می‌توان به طراحی مسیر در حمل‌ونقل، مدیریت بحران، مخابرات و شبکه‌های آب و برق و گاز اشاره کرد. در این زمینه، نمونه موردی کوچکی که روش ابداعی در این مقاله در آن به اجرا درآمده نیز آورده شده است.

کلیدواژه‌ها: گراف، دوگان گراف، دور اوپلری، دور همیلتونی، طراحی سفر.

* نویسنده مکاتبه‌کننده: تهران، خیابان ولیعصر (عج)، تقاطع میرداماد، دانشکده نقشه‌برداری دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی

۱- مقدمه

مفهوم گراف را اوایل در سال ۱۷۳۶ با طرح راه‌حلی برای مسئله پل‌های کونیگسبرگ ارائه کرد، که به تدریج توسعه یافت (Ore 1990, Barnett 2005). در دنیای اطراف ما، وضعیت‌ها و حالت‌های فراوانی وجود داشته است که می‌توان آنها را با مجموعه گره‌ها^۱ و یال‌ها^۲ مدل‌سازی کرد. برای مثال، گره‌ها می‌توانند نشان‌دهنده مراکز خدمات‌رسانی، و یال‌ها راه‌های اتصال میان آنها باشند.

برای حل برخی از مشکلات گراف، و یا برای ساده‌سازی آنالیزها در گراف، می‌توان تغییراتی را در آن به‌وجود آورد، که دوگان گراف یکی از آنها محسوب می‌شود. تاکنون تحقیقات مختلفی بر روی دوگان گراف و کاربردهای آن انجام شده است. (Vidyasagar (2003) روشی جبری را برای یافتن دوگان گراف، با استفاده از ماتریس درختی آن ارائه کرده است. (Hongyang (2008) و دیگران از دوگان گراف و مثلث‌بندی دلونی مقید برای طراحی مسیر بهینه استفاده کرده‌اند. (Hu (2008) و دیگران از دوگان گراف شبکه حمل‌ونقل شهری، برای مدل‌سازی ترافیک شهری استفاده کرده‌اند.

مفهوم دوگان گراف خطی ابتدا برای استفاده در گراف‌های وزن‌دار پیشنهاد شد و توسعه یافت (Caldwell 1961, Knodel 1969, Anez et al. 1996). دوگان گراف خطی به عنوان ایده‌ای برای حل مشکلات وجود طوقه و یال موازی نیز پیشنهاد شده است (Winter, 2002). (Winter (2002) از دوگان گراف برای مدل‌سازی هزینه چرخش‌ها در طراحی مسیر نیز استفاده کرده است.

دوگان گراف خطی مبنای ایده ارائه شده در این مقاله است. در بخش دوم این مقاله مفاهیم دوگان گراف خطی به طور کامل توضیح داده شده است. بخش سوم به حساب دوگان و مبنای ایده آن اختصاص دارد. در این بخش چگونگی تبدیل بین گراف، دوگان‌های

خطی آن و دوگان‌های خطی معکوس آن تشریح شده است. در بخش چهارم در مورد برخی از کاربردهای مفاهیم ارائه شده در این مقاله صحبت خواهد شد. از جمله، کاربردهای دوره‌های همیلتونی در گراف و تبدیل آن به دوره‌های اوپلری در دوگان خطی معکوس بررسی می‌شود. در بخش پنجم نمونه‌ای موردی که مدل ارائه شده در این تحقیق در آن اجرا شده است توضیح داده خواهد شد؛ و در نهایت، فصل آخر به نتیجه‌گیری اختصاص می‌یابد.

۲- مبانی دوگان گراف خطی^۳

گراف G مجموعه‌ای شامل دو مؤلفه (N, E) است که در آن N مجموعه‌ای متناهی و ناتهی از گره‌ها و E مجموعه‌ای از ارتباطات دودویی بین گره‌هاست. N ، مجموعه گره‌ها در گراف و E مجموعه یال‌های گراف است (Boundy, 1999).

می‌توان نشان داد که دوگان گراف خطی، گرافی با ویژگی‌های زیر است:

ویژگی ۱: این نوع دوگان هم بر روی گراف‌های جهت‌دار و هم غیرجهت‌دار انجام‌شدنی است؛ اما در این تحقیق نوع جهت‌دار آن مدنظر است.

ویژگی ۲: به ازای هر یال در گراف اولیه، یک گره در دوگان خطی (LD) آن وجود دارد $(|N_{LD}| = |E_G|)$ (Winter 2002).

ویژگی ۳: به ازای تمامی مسیرهای به طول ۲ در گراف اولیه، یک یال در دوگان خطی آن وجود دارد که جهت آن در راستای مسیر گراف اولیه است. یعنی: مسیرهای به طول ۲ در گراف اولیه $|E_{LD}| = 1$ (شکل ۱).

ویژگی ۴: وزن یال‌ها در دوگان خطی گراف، با تابعی از روی وزن یال‌ها در گراف اولیه محاسبه می‌شود.

1. Node
2. Arc
3. Linear Dual graph

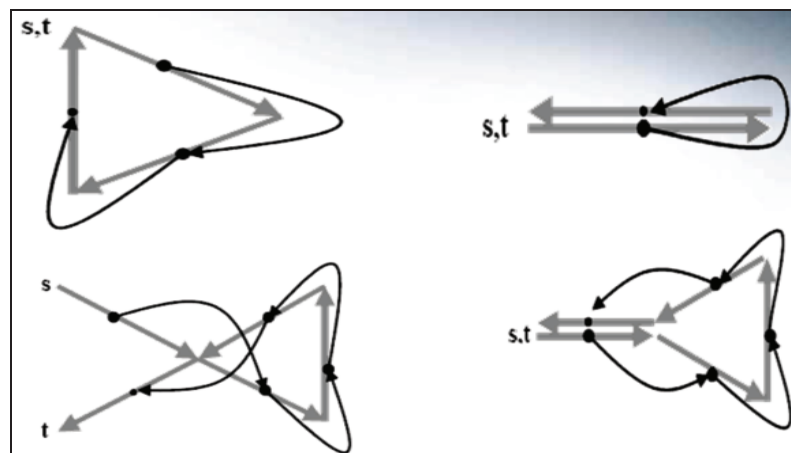
نظر نباشد. به عنوان مثال، گردشگری را در نظر بگیرید که قصد دارد از یک نقطه مسافرت خود را شروع کند و بعد از بازدید از چند نقطه دیگر به نقطه اول باز گردد. مسیریابی چنین مسائلی را نمی‌توان با استفاده از الگوریتم دایجسترا در گراف اولیه انجام داد. اما به نظر Winter (2002)، دوگان گراف خطی می‌تواند راه‌حلی برای این مشکل باشد. راه‌حل دوگان گراف خطی برای برخی از این مسائل در شکل ۲ نشان داده شده است.

۳- حساب دوگان گراف خطی

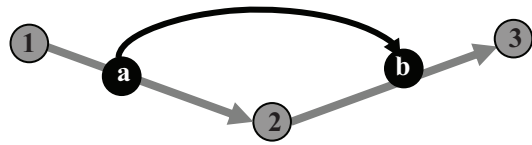
مطابق دومین ویژگی دوگان گراف خطی، تعداد گره‌ها در دوگان برابر تعداد یال‌ها در گراف اولیه است. اینک مسئله تبدیل گراف به دوگان آن، مسئله معکوس در نظر گرفته می‌شود؛ یعنی فرض می‌گردد گراف موجود اولیه، دوگان خطی یک گراف مجهول باشد؛ که در نتیجه با مسئله تعیین گراف اولیه رخ خواهد نمود. با استخراج گراف اولیه، حساب دوگان شکل می‌گیرد و می‌توان با استفاده از آن به نتایج کاربردی و جالبی رسید.

اگر دوگان گراف با LD نمایش داده شود، آن‌گاه:
رابطه (۱)

$$LD_{-m} \leftrightarrow \dots \leftrightarrow LD_{-1} \leftrightarrow LD_0 \leftrightarrow \dots \leftrightarrow LD_1 \leftrightarrow LD_2 \leftrightarrow \dots \leftrightarrow LD_n$$



شکل ۲. مشکلات گراف (رنگ خاکستری) برای الگوریتم دایجسترا و راه‌حل دوگان خطی آن (رنگ مشکی). S نشان‌دهنده نقطه شروع و t نشان‌دهنده نقطه پایان سفر است (Winter, 2002).



شکل ۱. گراف اولیه (رنگ خاکستری) به همراه دوگان خطی آن (رنگ مشکی)

قضیه ۲-۱: به ازای هر مسیر به طول $k \geq 2$ ، یک مسیر متناظر به طول $k-1$ در دوگان خطی آن وجود دارد (Winter, 2002).

تعداد مسیرهای به طول ۲ در گراف اولیه را می‌توان از روی توان دوم ماتریس مجاورت آن استخراج کرد. ماتریس مجاورت A، در گراف G به صورت زیر تعریف می‌شود:

اگر گره‌های G با V_1, V_2, \dots, V_n نمایش داده شود، ماتریس مجاورت آن ماتریسی $n \times n$ است که درایه A_{ij} آن برابر است با تعداد یال‌هایی که v_i را به v_j متصل کرده است.

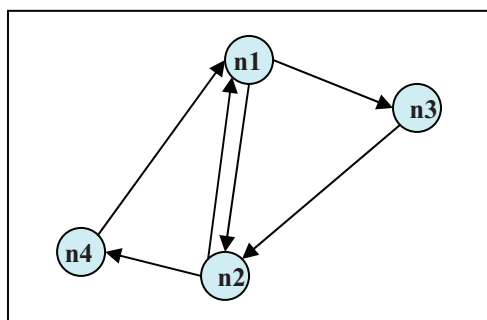
Winter (2002) ایده دوگان گراف خطی را برای فائق آمدن بر بعضی مشکلات گراف در مسیریابی‌ها ارائه کرده است؛ زیرا الگوریتم‌های مسیریابی همچون دایجسترا نمی‌توانند بر روی گراف‌هایی که دارای طوقه و یال موازی‌اند اجرا شوند. علاوه بر این، ممکن است موضوع مسیریابی یکی از مسائل و موضوعات طراحی سفر باشد که در آنها فقط طول مسیر بین دو نقطه مد

در ادامه، ابتدا نحوه استخراج LD_1 از روی LD_0 و LD_{-1} از روی LD_0 شرح داده می‌شود و سپس در بخش بعدی، برخی از کاربردهای این مسئله ذکر خواهد شد.

۳-۱- استخراج LD_i از LD_{i-1}

در این قسمت به کمک ویژگی‌های دوگان گراف خطی و قضایای یاد شده، نحوه استخراج LD_i از روی LD_{i-1} شرح داده می‌شود. مراحل و چگونگی استخراج آن بدین صورت است:

- ۱- با توجه به ویژگی دوم دوگان گراف، تعداد گره‌های LD_i استخراج می‌شود. این مقدار برابر با تعداد یال‌های LD_{i-1} است.
 - ۲- تعداد یال‌های LD_i با توجه به ویژگی سوم از روی مجموع درایه‌های توان دوم ماتریس مجاورت LD_{i-1} به دست می‌آید.
 - ۳- با توجه به قضیه ۲-۱ و ۳-۲ و با توجه به گره‌های ابتدا و انتهای یال‌ها در LD_{i-1} ، ابتدا و انتهای هر یال در LD_i مشخص می‌گردد.
- برای روشن‌تر شدن مراحل ذکر شده، به مثال زیر توجه کنید. فرض کنید که گراف اولیه LD_0 داده شده است (شکل ۳)، که در آن
- $$G = \{N, E\} \quad N = (n_1, n_2, n_3, n_4),$$
- $$E = \{(n_1, n_2), (n_1, n_3), (n_2, n_1), (n_2, n_2), (n_4, n_1)\}$$
- گراف اولیه (LD_0) است. شکل ۳ نمایش این گراف را نشان می‌دهد.



شکل ۳. گراف اولیه

در رابطه (۱)، LD_0 همان گراف موجود، LD_1 دوگان خطی آن، LD_2 دوگان خطی LD_1 ، LD_i دوگان خطی LD_{i-1} است. LD_{-1} گرافی است که دوگان خطی آن برابر گراف موجود اولیه (یعنی LD_0) است. LD_{-2} گرافی است که دوگان خطی آن برابر LD_{-1} است و LD_{-i} گرافی است که دوگان خطی آن برابر LD_{-i+1} است.

قضیه ۳-۱: به ازای هر مسیر با طول $k \geq i+1$ ، $i \geq 1$ در گراف اولیه LD_0 ، یک مسیر متناظر با طول $k-i$ در LD_i وجود دارد.

اثبات: از سومین ویژگی دوگان می‌دانیم که به ازای هر مسیر به طول دو در گراف اولیه یک یال (مسیر به طول یک) در دوگان خطی آن وجود دارد. بنابراین، مسیر $e_1, e_2, e_3, \dots, e_{k-1}, e_k$ در گراف اولیه LD_0 متناظر با مسیر $e_1^1, e_2^1, \dots, e_{k-1}^1$ در LD_1 ، متناظر با مسیر $e_1^2, e_2^2, \dots, e_{k-2}^2$ در LD_2 و متناظر با $e_1^i, e_2^i, \dots, e_{k-i}^i$ در LD_i است. در این تناظر:

$$-e_1^1 = e_1, e_2, e_2^1 = e_2, e_3, e_{k-1}^1 = e_{k-1}, e_k$$

$$-e_2^1 = e_1^1, e_2^1 = e_1, e_2, e_3$$

$$e_2^2 = e_2^1, e_3^1 = e_2, e_3, e_4$$

$$e_{k-2}^2 = e_{k-2}^1, e_{k-1}^1 = e_{k-2}, e_{k-1}, e_k$$

$$-e_1^i = e_1, e_2, e_i, e_{i+1}, e_2^i = e_2, e_3, \dots, e_{i+2}$$

$$e_{k-i}^i = e_{k-i}, e_{k-i+1}, \dots, e_k$$

قضیه ۳-۲: به ازای هر مسیر با طول $k \geq 1$ در LD_i ، یک مسیر متناظر با طول $k+1$ در LD_{i-1} وجود دارد.

اثبات: این قضیه نیز با توجه به ویژگی سوم دوگان اثبات‌شدنی است، زیرا طبق این ویژگی به ازای هر مسیر به طول دو در گراف اولیه یک یال در دوگان خطی آن وجود دارد. پس به ازای هر یال در دوگان خطی یک مسیر به طول دو در گراف اولیه وجود خواهد داشت.

(\equiv) بیانگر متناظر بودن است). شکل ۴ خروجی نهایی را نشان می‌دهد.

حال به راحتی می‌توان با تکرار مراحل پیش‌گفته روی LD_1 استخراج شده، LD_2 یا به عبارت دیگر دوگان خطی LD_1 را استخراج کرد. شکل ۵، LD_2 استخراج شده از روی LD_1 را نشان می‌دهد. این مراحل را می‌توان به تعداد دلخواه ادامه داد و LD های با اندیس بزرگ‌تر را استخراج کرد.

۳-۲- استخراج LD_{i-1} از روی LD_i

حال نحوه استخراج گراف LD_{i-1} از روی LD_i مورد بررسی قرار می‌گیرد. مراحل و چگونگی استخراج آن بدین صورت است:

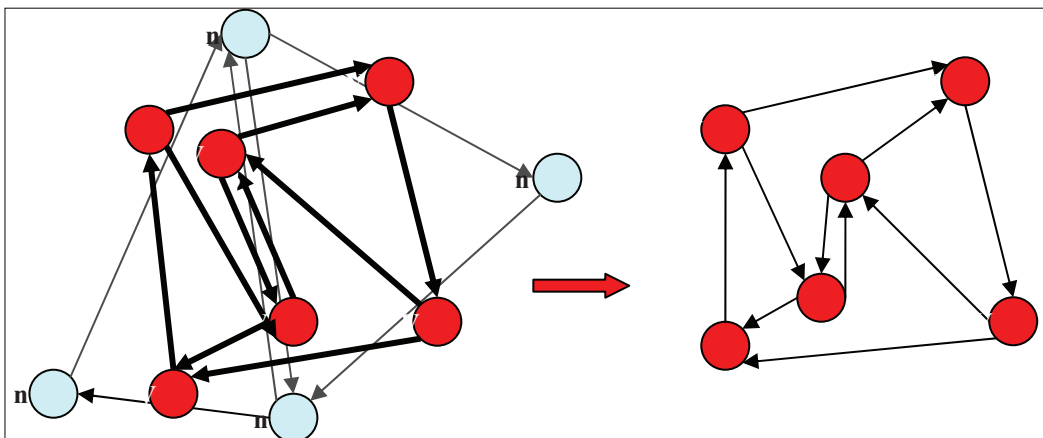
(۱) با توجه به ویژگی دوم دوگان، تعداد یال‌های LD_{i-1} به دست می‌آید که برابر تعداد گره‌های LD_i است.

(۲) با توجه به ویژگی سوم دوگان و قضیه ۲-۳ گره‌های ابتدا و انتهای هر یال در LD_{i-1} به دست می‌آید. برای تبیین بیشتر، گراف نشان داده شده در شکل ۶ را با فرض اینکه گراف اولیه (LD_0) است، در نظر بگیرید.

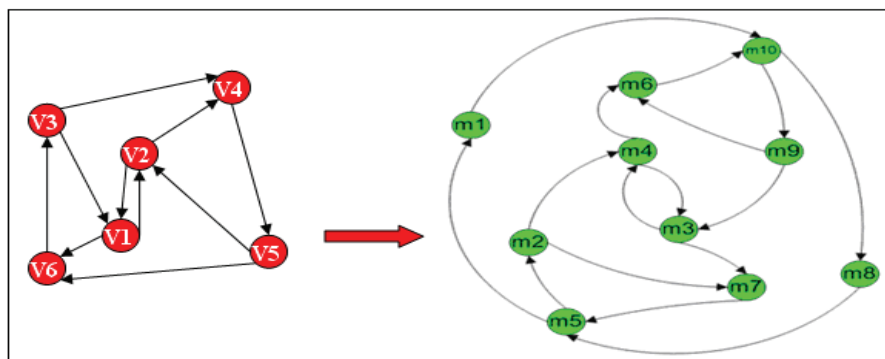
برای ترسیم دوگان گراف، ابتدا طبق مرحله ۱، تعداد گره‌های گراف LD_1 را محاسبه می‌کنیم. از ویژگی دوم دوگان تعداد آنها برابر ۶ گره به دست می‌آید. در مرحله دوم تعداد یال‌های گراف LD_1 از روی مجموع درایه‌های توان دوم ماتریس مجاورت گراف LD_0 استخراج می‌گردد.

$$A^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

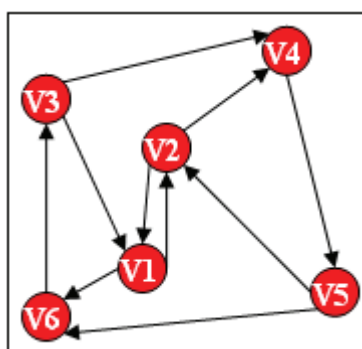
در نتیجه LD_1 به تعداد ۱۰ یال خواهد داشت. برای مشخص کردن گره‌های ابتدا و انتهای هر یال در LD_1 طبق قضیه ۲-۳ می‌دانیم که به ازای هر یال در LD_1 یک مسیر به طول ۲ در LD_0 وجود دارد؛ پس کافی است که برای هر یال در LD_0 ، دیگر یال‌هایی که گره ابتدای آنها برابر گره انتهای یال مورد نظر بوده است، شناسایی گردد. اگر موردی یافت شود، باید در LD_1 یک یال بین دو گره متناظر با یال مورد نظر و یال شناسایی شده رسم گردد. به عنوان مثال، در گراف شکل ۳، چون گره انتهای یال (n_1, n_2) برابر گره ابتدای یال (n_2, n_4) است، پس باید در LD_1 یک یال از گره $V_1 \equiv n_1 n_2$ به $V_6 \equiv n_2 n_4$ رسم شود



شکل ۴. دوگان گراف خطی مورد نظر



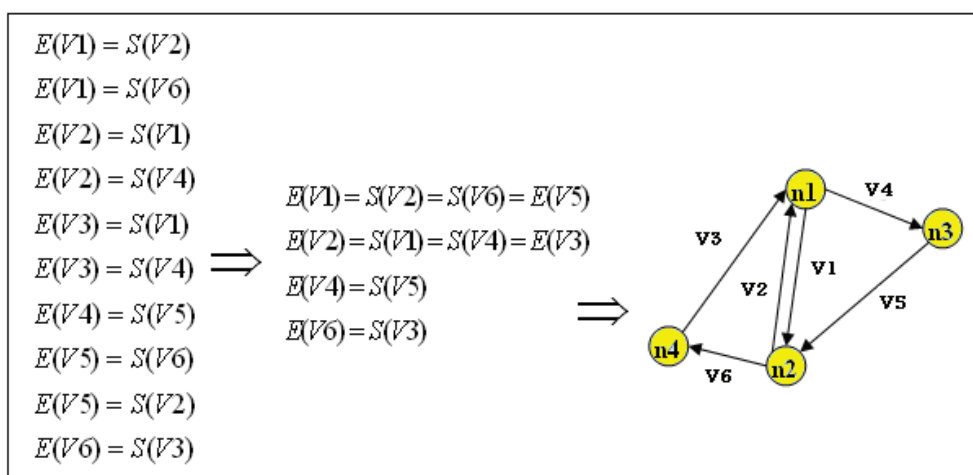
شکل ۵. دوگان مرحله دوم، گراف اولیه



شکل ۶. گراف اولیه (LD₀)

با توجه به قضیه ۳-۲ و ویژگی سوم دوگان خطی مشخص است که مثلاً وقتی از V1 به سمت V2 یک یال وجود دارد، باید گره انتهایی یال V1 در LD₋₁ برابر با گره ابتدای یال V2 باشد. اگر تمامی روابط موجود استخراج گردد، آن گاه خواهیم داشت:

- طبق مرحله اول مشخص است که LD₋₁ این گراف دارای ۶ یال (به تعداد گره‌های LD₀) است.
- بر پایه مرحله دوم گره‌های ابتدا و انتهای ۶ یال گراف را مشخص می‌کنیم. در گراف جهت‌دار، هر یال دارای گره ابتدا و انتهای معینی است که به وسیله همان‌ها مشخص می‌شود. از روی گراف،



(Eppstein, 2003). راه‌حلی‌هایی که تاکنون برای این مسئله ارائه شده‌اند، اغلب جواب نسبتاً خوب (نه لزوماً بهینه) را در بر می‌گیرند. الگوریتم ژنتیک و الگوریتم مورچه دو مورد از این راه‌حل‌ها هستند.

در مورد وجود دور همیلتونی در گراف‌ها نیز قضایایی بیان شده است اما هیچ کدام حالت عمومی و جامعی ندارند. از جمله این قضایا می‌توان به قضیه دیراک (Deleon, 1999) اشاره کرد که محدود به گراف‌های خاص است. در این بخش نشان داده می‌شود که می‌توان دور همیلتونی در گراف LD_1 را از روی دور اویلری در LD_1 استخراج کرد و به این ترتیب راه‌حل این مسئله در گراف‌های جهت‌دار از حالت Np-complete خارج می‌گردد. به عبارت دیگر، نشان داده می‌شود که مسیر همیلتونی در LD_1 ، به دور اویلری در LD_1 بدل می‌گردد.

اثبات: اولاً بر طبق قضیه ۳-۲ که برگرفته از ویژگی سوم دوگان گراف خطی است، به ازای هر مسیر به طول $k \geq 1$ در LD_1 ، مسیری متناظر با آن به طول $k+1$ در LD_1 وجود دارد. برطبق تعریف دور همیلتونی، اگر گرافی با N گره دارای دور همیلتونی باشد، باید دوری به طول N در آن وجود داشته باشد که از همه گره‌ها - جز گره اول و آخر - یکبار عبور کند. پس بر طبق قضیه ۳-۲ مسیر متناظر با این دور در LD_1 به طول $N+1$ خواهد بود. طبق ویژگی دوم دوگان خطی، چون به ازای هر گره در LD_1 یک یال در LD_1 وجود دارد، پس دور همیلتونی که از همه گره‌ها در LD_1 عبور کرده است، متناظراً از همه یال‌ها در LD_1 عبور می‌کند. از آنجا که بر طبق تعریف، دوری که از همه یال‌ها در یک گراف عبور می‌کند دور اویلری است، بنابراین شرط لازم قضیه اثبات می‌شود.

برای روشن شدن مطلب، مثال مربوط به شکل ۷ را در نظر بگیرید. در گراف شکل ۷-الف دور $V1V2V4V5V6V3V1$ در واقع دور همیلتونی است. اگر دور همیلتونی موجود در گراف شکل ۷-الف را با یال‌های متناظر آن در گراف شکل ۷-ب جای‌گذاری کنیم، خواهیم داشت:

E نشان‌دهنده گره پایانی یال و S نشان‌دهنده گره ابتدای یال است. در اینجا هم می‌توان با تکرار مراحل بر روی گراف خروجی (LD_1) ، LD‌های با اندیس پایین‌تر را استخراج کرد.

۴- کاربردها

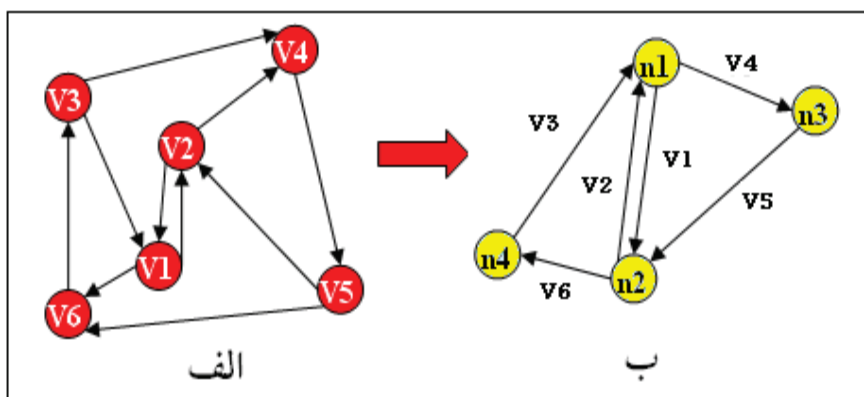
۴-۱- تبدیل مسیر همیلتونی در LD_1 به دور

اوایلری در LD_1

تعریف: دور همیلتونی دوری است که از همه گره‌های گراف بدون تکرار عبور کند. در دور همیلتونی نه یال تکرار می‌شود و نه گره - البته جز گروه اول و آخر (Haggkvist, 1981). دور اویلری دوری است که از همه یال‌های گراف عبور کند. دور اویلری یال تکراری ندارد ولی گره‌ها می‌توانند تکرار شوند (Kenneth, 2006).

در GIS در موارد بسیاری نیاز به تعیین دورهای اویلری و همیلتونی وجود دارد. به عنوان مثال، ماشین جمع‌آوری و حمل زباله در صورتی می‌تواند تمامی زباله‌های موجود در یک شهرک را بدون تکرار مسیر جمع کند که شبکه راه‌های آن شهرک دارای دور اویلری باشد. همچنین پستی‌چی در صورتی می‌تواند تمامی نامه‌های خود را بدون عبور از مسیر تکراری به مقصد برساند که شبکه حمل‌ونقل شهری که وی در آن حرکت می‌کند، دارای دور همیلتونی باشد.

شرط لازم و کافی برای وجود دور اویلری در یک گراف جهت‌دار این است که تعداد یال‌های ورودی و خروجی در هر گره برابر باشند. اما تاکنون راه‌حل قطعی برای تشخیص وجود دور همیلتونی در گراف بیان نشده است. راه‌حل‌های این مسئله تاکنون از نوع Np-complete بوده است (Garey, 1983). مسائل Np-complete مسائلی هستند که راه‌حل آنها نیاز به زمان بسیار طولانی دارد، لیکن آزمون درستی جواب خیلی سریع انجام می‌شود. یکی از مسائل معروف و وابسته به دور همیلتونی، مسئله فروشنده دوره‌گرد است که یکی از قدیمی‌ترین مسائل بهینه‌سازی به‌شمار می‌آید. راه‌حل این مسئله نیز از نوع Np-complete است



شکل ۷. الف) گراف اولیه (LD₀)، ب) دوگان معکوس آن (LD₋₁)

$$(n_1n_2n_1 = V_1V_2, n_2n_1n_3 = V_2V_4, n_1n_3n_2 = V_4V_5, n_3n_2n_4 = V_5V_6, n_2n_4n_1 = V_6V_3)$$

$$n_1n_2n_1n_3n_2n_4n_1 = V_1V_2V_4V_5V_6V_3$$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود، دور اولیری در LD₋₁ متناظر با یک مسیر همیلتونی در LD₀ است که شامل تمامی گره‌ها می‌شود. اگر گره ابتدای مسیر در انتها تکرار گردد، مسیر همیلتونی تبدیل به دور همیلتونی خواهد شد. لازمه این امر آن است که از گره آخر به گره اول یک یال وجود داشته باشد که این خود امری بدیهی است، زیرا بر طبق ویژگی سوم دوگان خطی گراف به ازای تمامی مسیرهای به‌طول دو در گراف اولیه یک یال در دوگان خطی آن وجود دارد و از آنجا که مسیر n₄n₁n₂ در گراف LD₋₁ وجود دارد، پس متناظر با آن یال V₃V₁ در دوگان خطی آن (LD₀) وجود خواهد داشت. بنابراین دور همیلتونی در گراف اولیه V₁V₂V₄V₅V₆V₃V₁ است.

بنابراین، برطبق مطالب بیان شده، در صورتی که دوگان معکوس یک گراف دور اولیری نداشته باشد، آن گراف دور همیلتونی نخواهد داشت. همچنین اگر دوگان معکوس گراف دور اولیری داشته باشد، آن گراف دارای دور همیلتونی خواهد بود که متناظر با دور اولیری در دوگان معکوس آن است. مسلم است که اگر بتوان بیشتر از یک دور اولیری در LD₋₁ یافت، آن‌گاه

$$(V_1 = n_1n_2, V_2 = n_2n_1, V_3 = n_4n_1, V_4 = n_1n_3, V_5 = n_3n_2, V_6 = n_2n_4)$$

$$V_1V_2V_4V_5V_6V_3V_1 = n_1n_2n_1n_3n_2n_4n_1n_2$$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود، دور همیلتونی در LD₀، تمامی یال‌های موجود در LD₋₁ را در بر می‌گیرد. پس این دور در LD₋₁ به دور اولیری تبدیل می‌شود. بنابراین شرط لازم برای اینکه یک گراف دور همیلتونی داشته باشد، آن است که دوگان خطی معکوس آن دور اولیری داشته باشد؛ زیرا اگر نتوان دور اولیری در دوگان خطی معکوس یافت، مطمئناً نمی‌توان دوری در گراف اولیه یافت که از تمامی گره‌ها عبور کند.

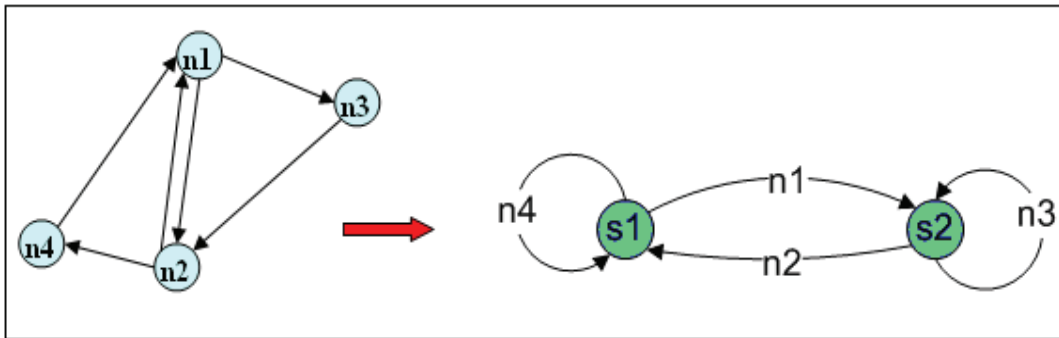
حال نشان می‌دهیم که این شرط نه تنها لازم است بلکه کافی هم هست. فرض می‌کنیم که در LD₋₁ دور اولیری وجود دارد و آن‌گاه نشان می‌دهیم که حتماً در گراف LD₀ یک دور همیلتونی وجود دارد. این‌بار گراف شکل ۷-ب را در نظر بگیرید. همان‌طور که ملاحظه می‌شود، این گراف دارای دور اولیری است، زیرا تعداد یال‌های ورودی و خروجی در هر گره آن برابر است. n₁n₂n₁n₃n₂n₄n₁ یک دور اولیری در این گراف است. از آنجا که طبق ویژگی سوم دوگان به ازای تمامی مسیرهای به‌طول دو، یک یال در جهت مسیر در دوگان خطی آن وجود دارد، دور اولیری بالا را با گره‌های متناظر آن در LD₀ جایگزین می‌کنیم.

خواهد داشت که نمی‌توان متناظر آن را در گراف B شکل ۹ یافت. با انجام مراحل که توضیح داده خواهد شد، می‌توان از این مشکل احتمالی نیز اجتناب کرد. مراحل لازم، اینها هستند:

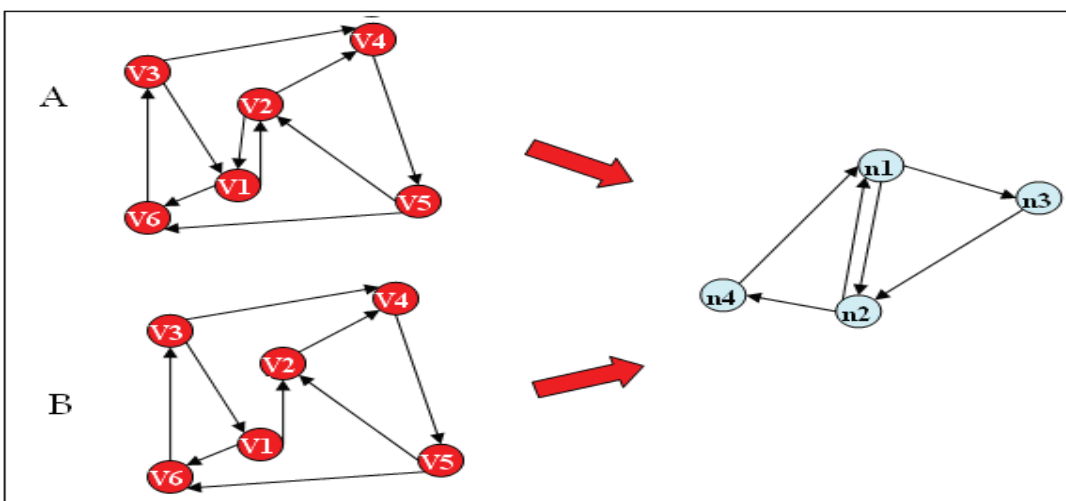
۱. پس از استخراج LD_{-1} از روی گراف اولیه، دوباره دوگان خطی آن را محاسبه می‌کنیم تا یال‌هایی که در گراف اولیه نسبت به دوگان خطی LD_{-1} کم بودند، مشخص شوند. به عنوان مثال، در شکل ۹، پس از آنکه از LD_{-1} دوگان خطی گرفته شود، مشخص می‌گردد که گراف A هیچ کمبود یالی ندارد و گراف B یال $V2V1$ را کم دارد.

LD_{-1} بیشتر از یک دور همیلتونی خواهد داشت. به عبارت دیگر، تعداد دور همیلتونی در LD_{-1} برابر با تعداد دور اویلری در LD_{-1} است. ممکن است در LD_{-1} گره یا گره‌هایی دارای یال طوقه وجود داشته باشند (شکل ۸). وجود چنین طوقه‌هایی با مفهوم دور اویلری تناقض ندارد.

این امکان وجود دارد که در روش ارائه شده برای استخراج LD_{-1} از روی گراف اولیه، مسیرهایی به طول ۲ وجود داشته باشد که در گراف اولیه به ازای آنها یالی وجود نداشته باشد. این مسئله در شکل ۹ نشان داده شده است. بنابراین، حتماً مسیری در LD_{-1} وجود



شکل ۸. LD_{-1} استخراج شده از روی گراف سمت چپ ممکن است حلقه داشته باشد.



شکل ۹. گراف B یک یال از گراف A کمتر دارد ($V2V1$)، اما LD_{-1} آنها یکسان است.

کوتاه‌ترین مسیر مثل الگوریتم دایجسترا حل کرد، زیرا در الگوریتم دایجسترا به صورت همزمان تنها امکان معرفی یک مبدأ و یک مقصد وجود دارد. همچنین در الگوریتم‌های مسیریابی امکان بازگشت به یک گره که مسیر قبلاً از آن عبور کرده است وجود ندارد. تاکنون برای حل چنین مسائلی، مسیرها را به صورت دستی از قبل تعریف می‌کردند (Davies et al., 2001). در این بخش کاربرد الگوی پیشنهادی نشان داده می‌شود. نیز نشان داده خواهد شد که شاید بتوان چنین مسیریابی را با انجام الگوریتم‌های مسیریابی همچون دایجسترا در دوگان گراف (LD_1) و یا بالاتر (LD_2, LD_3, \dots) استخراج کرد. برای این منظور، ابتدا لازم است نشان داده شود که می‌توان مسیر متناظر به دست آمده از آنالیز دایجسترا در LD_1 را در LD_0 جست‌وجو کرد. برای نشان دادن این مطلب، ابتدا باید وزن یال‌ها در LD_1 را از روی وزن یال‌های گراف اولیه استخراج کرد. وزن یال‌ها هر چیزی می‌تواند باشد و این خود مستقل از نوع معیار وزن یال‌هاست. پس از تحقیق و بررسی، مشخص شد که این کار با تعریف تابع تبدیل زیر انجام‌شدنی است. E, e_1 و e_2 یال‌های گراف شکل ۱۱ اند و w نشان‌دهنده وزن آنهاست.

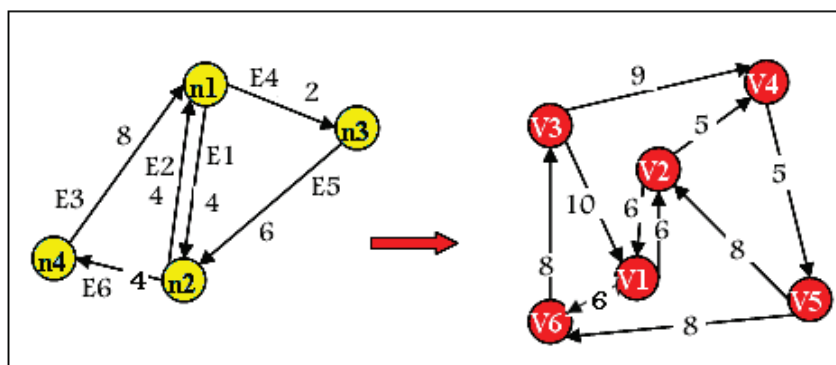
$$W_E = W_{e_1} + W_{e_2} \quad \text{رابطه (۲)}$$

شکل ۱۰ وزن هر یک از یال‌ها در گراف اولیه و دوگان آن را که با استفاده از رابطه (۲) به دست آمده است، نشان می‌دهد.

۲. پس از اینکه یال‌های کمبود مشخص شدند، در LD_{-1} دور اولی به نوعی انتخاب می‌شود که دور متناظر با آن در گراف اولیه، یال‌های کمبود را در بر نگیرد. این کار با اضافه کردن شرط عدم عبور از یال‌های کمبود به الگوریتم‌های موجود یافتن دور اولی مثل Fleury به راحتی انجام‌شدنی است. به عنوان مثال، چون یال $V_2V_1 = n_2n_1n_2$ در گراف B شکل ۹ کم است، لازم است که دور اولی به نحوی انتخاب شود که شامل $n_2n_1n_2$ نشود. مثلاً دور اولی $n_1n_2n_1n_3n_2n_4n_1$ مناسب است که متناظر با مسیر همیلتونی $V_1V_2V_4V_5V_6V_3$ است و دور همیلتونی آن در گراف اولیه $V_1V_2V_4V_5V_6V_3V_1$ است. اگر نتوان دور اولی در LD_{-1} پیدا کرد که یال‌های کمبود را در بر نگیرد، آن‌گاه گراف اولیه دور همیلتونی نخواهد داشت.

۴-۲- طراحی سفر

همان‌طور که بیان شد، دوگان گراف خطی به منظور ارائه راه‌حلی برای مسائل طراحی سفر پیشنهاد شده است (Winter, 2002). نمونه کاربردی از این بحث می‌تواند طراحی تور باشد؛ و از جمله طراحی سفر فرد گردشگری که می‌خواهد سفر خود را از نقطه خاصی شروع کند و پس از بازدید از چند نقطه دیگر به نقطه اول بازگردد. چنین مسائلی را نمی‌توان با الگوریتم‌های



شکل ۱۰. دوگان گراف خطی به همراه وزن هر یال

مسیر به دست آمده حذف کنیم، یعنی:

$$n_1 n_2 n_4 = 20 - 4 - 8 = 8$$

همان طور که ملاحظه می شود، نتیجه به دست آمده از این روش با نتیجه به دست آمده برای آن در شکل ۱۱ که نتیجه الگوریتم دایجسترا را برای تمامی گره های گراف اولیه نشان می دهد، برابر است.

همان گونه که دیده شد، مسیریابی که از الگوریتم دایجسترا در LD_1 به دست می آیند، می توانند حداکثر شامل دوره هایی به طول ۲ در LD شوند (دور $n_2 n_1 n_2$). اگر مسیریابی در LD های دارای اندیس بالاتر انجام گیرد، مسلماً نتیجه آن در LD شامل دوره هایی با طول بزرگ تر خواهد شد. بنابراین به نظر می رسد که از این روش می توان برای مسائلی همچون طراحی سفر گردشگر - که در آن امکان رخ دادن دور و وجود چندین مقصد همزمان در مسیریابی مطرح است - استفاده کرد؛ زیرا گره هایی که تکرار می شوند می توانند نشان دهنده مقصدهای مختلفی باشند.

۵- مطالعه موردی

در این بخش نحوه و چگونگی پیاده سازی اهداف تحقیق، در نمونه ای موردی تشریح شده است. برای این منظور تعدادی از بیمارستان های شهر تهران به عنوان گره های گراف، و کوتاه ترین مسیرهای بین آنها به عنوان یال های گراف در نظر گرفته شده اند. لازم به ذکر

برای اینکه ارتباط بین نتایج الگوریتم دایجسترا برای گراف اولیه و دوگان آن مشخص شود، نتیجه الگوریتم دایجسترا برای تمامی گره های دوگان گراف در جدول ۱ آورده شده است.

با بررسی نتایج الگوریتم دایجسترا در گراف اولیه و دوگان آن، مشخص می شود که به راحتی می توان از روی دوگان گراف، کوتاه ترین مسیر در گراف اولیه را استخراج کرد. این مسئله در مثال زیر توضیح داده شده است: فرض کنیم که یافتن کوتاه ترین مسیر از گره n_1 به گره n_4 در گراف اولیه مد نظر باشد:

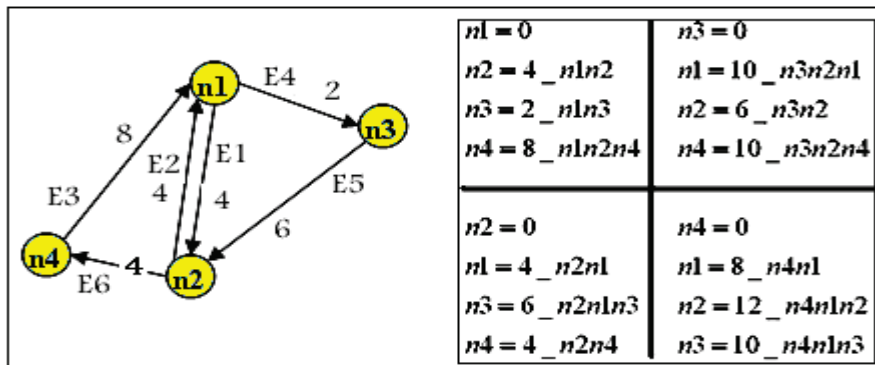
۱. برای انجام این محاسبه در دوگان گراف ابتدا یکی از یال های ختم شده به n_1 را می یابیم (مثلاً یال E_2).
 ۲. در نتیجه مبدأ در گراف دوم یال E_2 (متناظر با گره V_2) است. مقصد هم یالی است که از n_4 شروع شده و مخالف خروجی مرحله یک است (مثلاً یال E_3).
 ۳. کوتاه ترین مسیر از یال E_2 (متناظر با گره V_2) به یال E_3 (متناظر با گره V_3) را با استفاده از الگوریتم دایجسترا در دوگان گراف به دست آمده محاسبه می کنیم (نتیجه $E_2 E_1 E_6 E_3 = 20$).
 ۴. گره های دو سر هر یک از یال ها در مسیر به دست آمده را از روی گراف اولیه جایگزین می کنیم:
- $$E_2 E_1 E_6 E_3 = n_2 n_1 n_2 n_4 n_1$$
۵. در نهایت، کافی است که دو گره ابتدا و انتها را از

جدول ۱. نتیجه الگوریتم دایجسترا برای تمامی گره های دوگان گراف

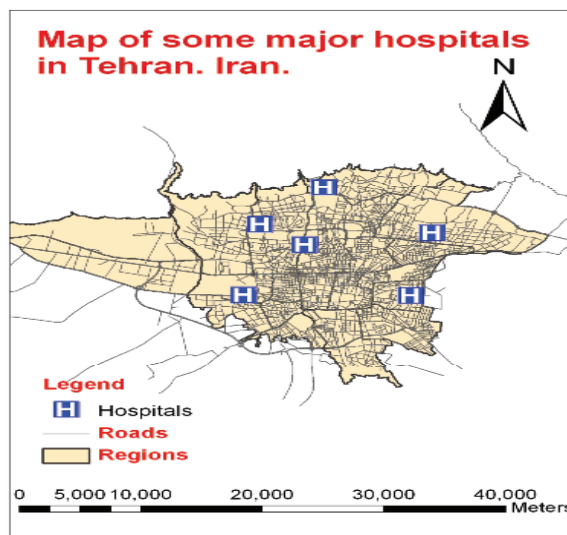
$v_1 = 0$ $v_2 = 6_v_1 v_2$ $v_3 = 14_v_1 v_6 v_3$ $v_4 = 11_v_1 v_2 v_4$ $v_5 = 16_v_1 v_2 v_4 v_5$ $v_6 = 6_v_1 v_6$	$v_5 = 0$ $v_1 = 10_v_3 v_1$ $v_2 = 16_v_3 v_1 v_2$ $v_4 = 9_v_3 v_4$ $v_5 = 14_v_3 v_4 v_5$ $v_6 = 16_v_3 v_1 v_6$	$v_5 = 0$ $v_1 = 14_v_5 v_2 v_1$ $v_2 = 8_v_5 v_2$ $v_3 = 16_v_5 v_6 v_3$ $v_4 = 13_v_5 v_2 v_4$ $v_6 = 8_v_5 v_6$
$v_2 = 0$ $v_1 = 6_v_2 v_1$ $v_3 = 20_v_2 v_1 v_6 v_3$ $v_4 = 5_v_2 v_4$ $v_5 = 10_v_2 v_4 v_5$ $v_6 = 12_v_2 v_1 v_6$	$v_4 = 0$ $v_1 = 19_v_4 v_5 v_2 v_1$ $v_2 = 13_v_4 v_5 v_2$ $v_3 = 21_v_4 v_5 v_6 v_3$ $v_5 = 5_v_4 v_5$ $v_6 = 13_v_4 v_5 v_6$	$v_6 = 0$ $v_1 = 18_v_6 v_3 v_1$ $v_2 = 24_v_6 v_3 v_1 v_2$ $v_3 = 8_v_6 v_3$ $v_4 = 17_v_6 v_3 v_4$ $v_5 = 21_v_6 v_3 v_4 v_5$

شکل ۱۳ گراف حاصل از در نظر گرفتن بیمارستان‌ها به عنوان گره، و کوتاه‌ترین مسیرهای بین آنها به عنوان یال را نشان می‌دهد.

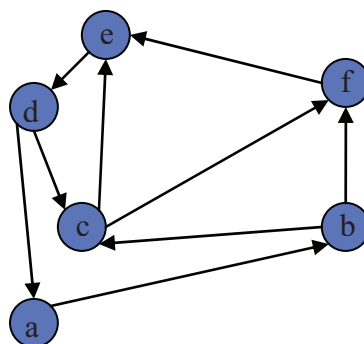
است که تنها برخی از مسیرهای بین بیمارستان‌ها به صورت انتخابی به‌عنوان یال‌های گراف در نظر گرفته شده‌اند. منطقه مورد مطالعه در شکل ۱۲ دیده می‌شود.



شکل ۱۱. نتایج الگوریتم دایجسترا برای تمامی گره‌های گراف اولیه



شکل ۱۲. نقشه شهر تهران، به همراه موقعیت مکانی تعدادی از بیمارستان‌های مهم آن

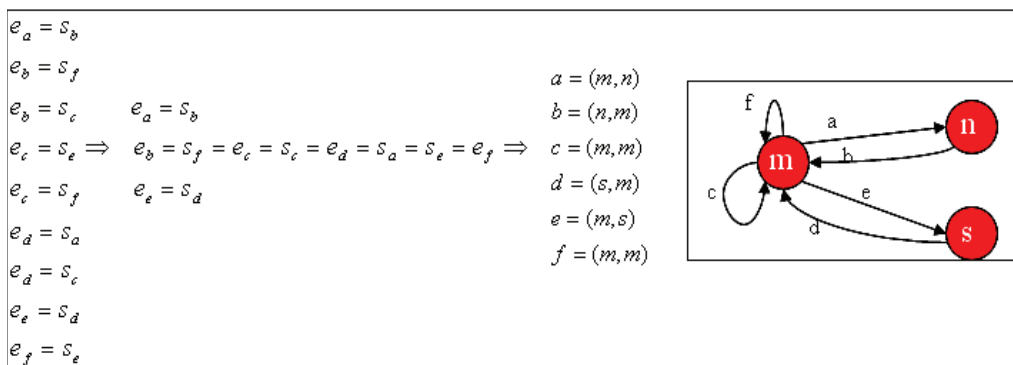


شکل ۱۳. گراف حاصل از بیمارستان‌ها به عنوان گره، و کوتاه‌ترین مسیرهای شبکه به عنوان یال

بنابراین به منظور تشخیص دور همیلتونی در گراف اولیه، باید دور اویلری در LD_{-1} را به گونه‌ای تعیین کرد که این یال‌های کمبود را در بر نگیرد. برای این منظور از الگوریتم شکل ۱۵ استفاده می‌شود. در این الگوریتم LE همان مجموعه یال‌های کمبود هستند: پس از اجرای الگوریتم دور اویلری (m,n,m,m,m,s,m) به دست آمد که معادل با مسیر همیلتونی (a,b,c,f,e,d) در گراف اولیه است. چون da در زمره یال‌های کمبود نیست، پس (a,b,c,f,e,d,a) یک دور همیلتونی در گراف اولیه است (شکل ۱۶).

حال می‌خواهیم دوری را که از همه بیمارستان‌ها عبور کرده و بدون وجود یال تکراری به بیمارستان اول بازگشته است، بیابیم. همان‌طور که بیان شد، این دور همان دور همیلتونی است. برای جواب دادن به این مسئله، ابتدا LD_{-1} گراف را رسم می‌کنیم. شکل ۱۴ LD_{-1} این گراف را نشان می‌دهد. همان‌طور که در شکل ۱۴ ملاحظه می‌شود، گراف LD_{-1} اویلری است. پس از محاسبه دوگان گراف شکل ۱۴، یال‌های کمبود به قرار زیر مشخص شدند:

fc و df ، de ، ca ، be ، Fa

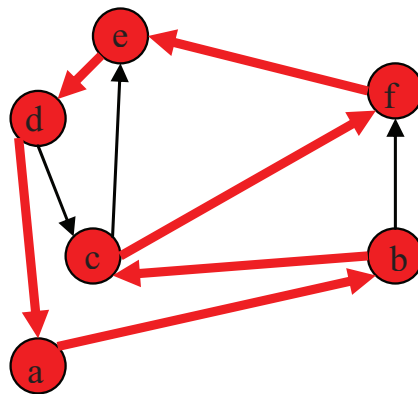


شکل ۱۴. گراف LD_{-1} استخراج شده از گراف شکل ۱۳

```

Choose a root node  $r$  and start with the trivial partial circuit  $(r)$ .
Given a partial circuit  $(r = x_0, x_1, \dots, x_t = r)$  that traverses some but not LE
members of the edges of  $G$  containing  $r$ .
Remove these edges from  $G$ .
 $j =$  the length of partial circuit and  $i = 1$ 
While  $i \leq j$  do
- Let  $k \geq i$  be the least integer for which  $x_k$  is incident with one of the
  remaining edges. Form a greedy partial circuit among the remaining edges of
   $G$  that  $(x_{k-1}, x_k = y_0, y_1, \dots, y_s = x_k, x_{k+1})$  do not be consist of LE members.
- Expand the original circuit:
   $(r = x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_k = y_0, y_1, \dots, y_s = x_k, x_{k+1}, \dots, x_t = r)$ 
-  $i = k + 1$ 
-  $j =$  the length of expanded partial circuit
wend
    
```

شکل ۱۵. الگوریتم استفاده شده برای استخراج دور اویلری در گراف LD_{-1}



شکل ۱۶. دور همیلتونی به دست آمده از الگوریتم در گراف اولیه

می‌آید، و می‌توان آن را با استفاده از حساب دوگان‌ها و استخراج دوگان خطی معکوس از یک گراف، مشخص کرد؛ به این ترتیب که طی این تبدیل تمامی دورهای همیلتونی در گراف اولیه به دورهای اولیری در دوگان خطی معکوس آن تبدیل می‌شوند.

با استفاده از دوگان‌های خطی گراف می‌توان مسائل طراحی سفر در گراف اولیه را حل کرد. برای این منظور، لازم است نشان داده شود که می‌توان مسیره‌های متناظر با مسیره‌های به دست آمده از الگوریتم دایجسترا در دوگان گراف خطی را، در گراف اولیه محاسبه کرد. چگونگی انجام این مسئله در این مقاله تشریح شد. از آنجا که با هر بار دوگان خطی معکوس گرفتن از یک گراف تعداد گره‌ها و یال‌های آن کاهش می‌یابد، به نظر می‌رسد که این ایده می‌تواند راه‌حل مناسبی برای کوچک کردن گراف شبکه‌های عظیم متشکل از گره‌ها و یال‌های بسیار زیاد باشد.

بنابراین، دور (a,b,c,f,e,d,a) مسیری است که از یک بیمارستان شروع می‌شود و پس از عبور از تمامی بیمارستان‌ها، بدون گذشتن از بیمارستان تکراری، به بیمارستان اول بازمی‌گردد. همان‌طور که ملاحظه شد، با استفاده از این روش می‌توان دور همیلتونی در گراف اولیه را بدون صرف وقت زیاد استخراج کرد. این روش با افزایش حجم شبکه نیز به مشکلی برخورد نمی‌کند. تنها الگوریتم جامعی که برای یافتن دور همیلتونی در تمامی گراف‌ها تاکنون وجود داشته است، تمامی مسیره‌های موجود در گراف را استخراج، و سپس از بین آنها دور همیلتونی در گراف را محاسبه می‌کند. البته مسلماً این روش بسیار زمان‌بر است و به همین خاطر راه‌حل یافتن دور همیلتونی در گراف تاکنون از نوع مسائل $Np_complete$ بوده است. با روش پیشنهادی این مقاله، توانستیم راه‌حلی برای این مسئله در گراف جهت‌دار ارائه کنیم.

۶- منابع

Anez, J., delaBarra, I., Perez., B., 1996, **Dual Graph Representation of Transport Networks**, *Transportation Research* 30(3), 209-216.

Barnett, H.J., 2005, **Early Writings on Graph Theory: Euler Circuits and The Konigsberg Bridge Problem; An Historical Project**,

۵- نتیجه‌گیری

در چارچوب مقاله حاضر، نخست حساب دوگان گراف خطی بر مبنای دوگان گراف به‌عنوان ابزاری قوی برای محاسبات مکانی بنا نهاده شده و سپس نحوه استخراج دوگان‌های متوالی و معکوس آن تشریح گردیده است. الگوی پیشنهادی می‌تواند بستر بسیاری از آنالیزها و کاربردها قرار گیرد. از آن جمله، تعیین وجود دور همیلتونی است که مسئله‌ای با پیچیدگی سخت به‌شمار

- Colorado State University–Pueblo Pueblo, CO 81001 – 4901.
- Boundy, J.A. and U.S.R. Murty, 1999, **Graph Theory with Applications**, ISBN: 964-6761-57-7.
- Caldwell, T., 1961, **On Finding Minimum Routes in a Network with Turn Penalties** *Communications of the ACM*, 4(2) 107-108.
- Davies, N., Cheverst, K., Mitchell, K., Efrat, A., 2001, **Using and Determining Location in a Context Sensitive Tour Guide**, *IEEE Computer Journal*, 34(8), 35-41.
- DeLeon, M., 1999, **A Study of Sufficient Conditions for Hamiltonian Cycles**, Department of Mathematics and Computer Science, Seton Hall University, South Orange, New Jersey 07079, U.S.A.
- Eppstein, D., 2003, **The Traveling Salesman Problem for Cubic Graphs**, In Proc. 8th Worksh. Algorithms and Data Structures, Dehne F., Sack J.-R. Smid M., (Eds.), No. 2748 in Lecture Notes in Computer Science, Springer-Verlag, pp. 307–318.
- Garey, M.R., Johnson, D.S., 1983, **Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness**, New York: W. H. Freeman.
- Haggkvist, R. and Nicoghossian, C.G., 1981, **A Remark on Hamiltonian Cycles**, *J. Combinat, Theory* B30, 118-120.
- Hu. M.B., Jiang, R., Wu, Y.H., Wang, W.X., and Wu. Q.S., 2008, **Urban Traffic from the Perspective of Dual Graph**, *The European Physical Journal B - Condensed Matter and Complex Systems*, Springer Berlin / Heidelberg, ISSN 1434-6028 (Print) 1434-6036 (Online), 127-133.
- Kenneth, R., 2006, **Discrete Mathematics And Its Applications**, Mcgraw-hill Science/ engineering/math, ISBN 0-07-288008-2.
- Knodel, W., 1969, **Graphentheoretische Methoden und ihre Anwendungen** *Okonometrie und Unternehmensforschung*, 13 Springer, Berlin.
- Ore, O., 1990, **Graphs and Their Uses**, new mathematical library(34), the mathematical association of america.
- Vidyasagar, M., 2003, **An Algebraic Method for Finding a Dual Graph of a Given Graph**, *Circuits Theory*, *IEEE Transactions on* [legacy, pre - 1988], Volume: 17, 434 – 436, ISSN: 0018-9324.
- Winter, S., 2002, **Route Specifications with a Linear Dual Graph**, *Symposium on Geospatial Theory, Processing and Applications*, Ottawa.
- Winter, S., 2002, **Modeling Costs of Turns in Route Planning**, *Geoinformatica*, 345-361, Kluwer Academic Publishers, ISSN: 1384-6175.
- Yan, H., Wang, H., Chen, Y. & Dai, G., 2008, **Path Planning based on Constrained Delaunay Triangulation**, *IEEE, Intelligent Control and Automation*, 5168 - 5173 ISBN: 978-1-4244-2113-8.